LES NOMBRES COMPLEXES

Comment sont apparus les nombres complexes ?

En 1545 Jérôme CARDAN fournit des formules de résolution de l'équation $x^3 = px + q$.
Une des solutions de cette équation est donnée par la formule :

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{27q^2-4p^3}{4\times 27}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{27q^2-4p^3}{4\times 27}}}$$

Si l'on appliquait cette formule à l'équation $x^3 = 15x + 4$ on trouverait une solution x_0 donnée par la formule : $x_0 = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$

Cette expression pose alors deux problèmes :

1) Que signifie ce $\sqrt{-121}$?
2) L'expression obtenue peut-elle être simplifiée ?

I NOMBRES COMPLEXES – REPRÉSENTATION :

A. Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes :

Définition 1 : On doit aux mathématiciens *Euler (1707-1783)* et *Bombelli (1526 – 1572)* l'invention du ***nombre complexe*** i, solution de l'équation …………

Par conséquent ……………..

i n'est pas un nombre réel ($i \notin \mathbb{R}$), on ne peut donc pas lui donner de valeur, ni parler du signe de i.

Définition 2 :
Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$)
Cette écriture est appelée ………………………………………
x est la …………………………………de z on écrira $\mathrm{Re}(z) = x$.
y est la …………………………………de z on écrira $\mathrm{Im}(z) = y$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Tout nombre réel est aussi un nombre complexe.
En effet si $x \in \mathbb{R}$ alors on a x = …….+ i……… donc $x \in \mathbb{C}$.
On dira que $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$ et on écrira $\mathbb{R}$ ……$\mathbb{C}$.

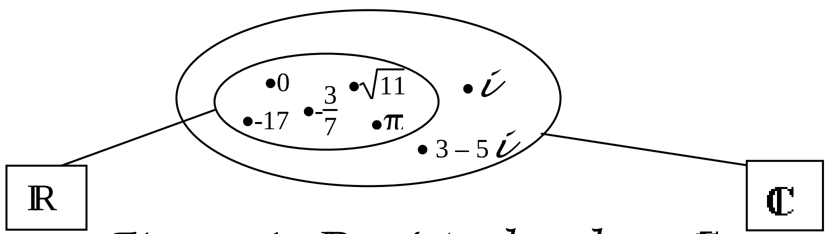


Figure 1 : $\mathbb{R}$ *est inclus dans* $\mathbb{C}$

Définition 3 :
Soit un nombre complexe, alors
- z est réel si, et seulement si, $\text{Im}(z) =$ …………
- z est un imaginaire pur si, et seulement si, $\text{Re}(z) =$ ………

Exemple 1 : Les nombres $2i$; $i\sqrt{3}$; $-\frac{7}{3}i$ sont des …………………………

Exemple 2 : a et sont deux nombres réels et $z = (a^2 - b^2) + i(a^2 + b^2)$

a) À quelle condition z est un imaginaire pur ?

b) À quelle condition z est réel ?

Propriété 1 : Soient 2 nombres complexes z et z'.

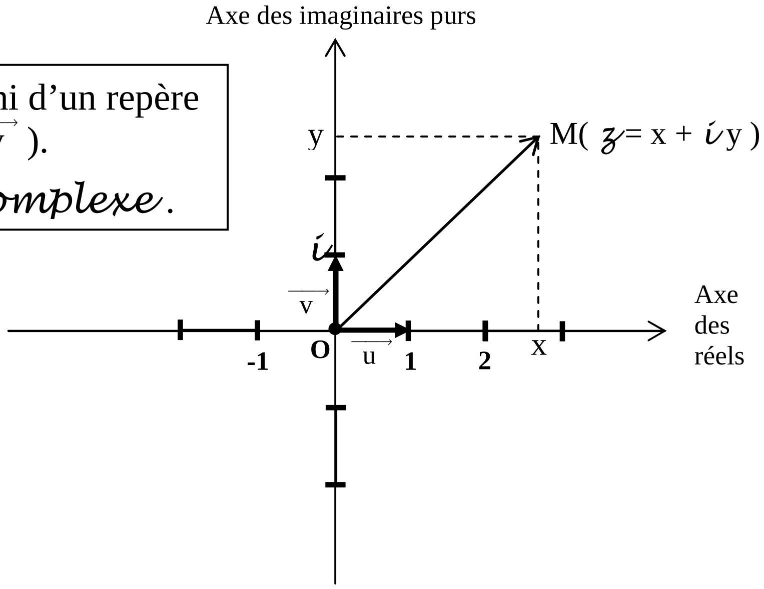
$$z = z' \quad \Leftrightarrow \quad \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \ \textbf{et} \ \text{Im}(z) = \text{Im}(z')$$

B. Représentation géométrique des nombres complexes :

Cette représentation géométrique vint plusieurs siècles après l'invention des nombres complexes, elle est due en particulier au mathématicien suisse Jean-Robert Argand (1768-1822) qui publia en 1806 « Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques *» mais elle ne s'imposa que lorsque les mathématiciens renommés Gauss et Cauchy l'eurent adoptée entre 1831 et 1847.*

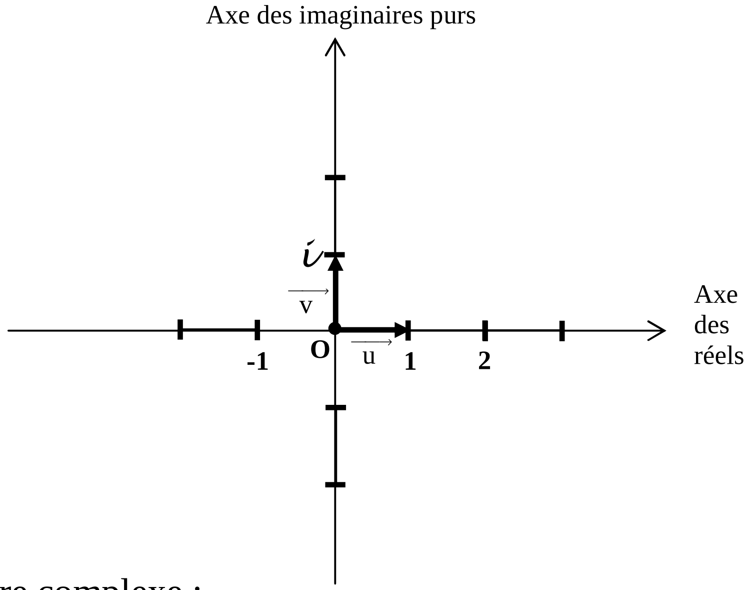
Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On l'appelle *plan complexe*.



Définition 4 :
- On dit que M de coordonnées (x ; y) a pour ……….. le complexe $z_M = x + iy$.
- On dit que M est …………….. de z_M .
- L'axe des abscisses représente l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.
- L'axe des ordonnées représente l'ensemble des imaginaires purs.
- La distance OM est appelée …………….. de z_M . On note $|z_M| = OM$.
- Par conséquent si $z = x + iy$ alors $|z| =$……………………

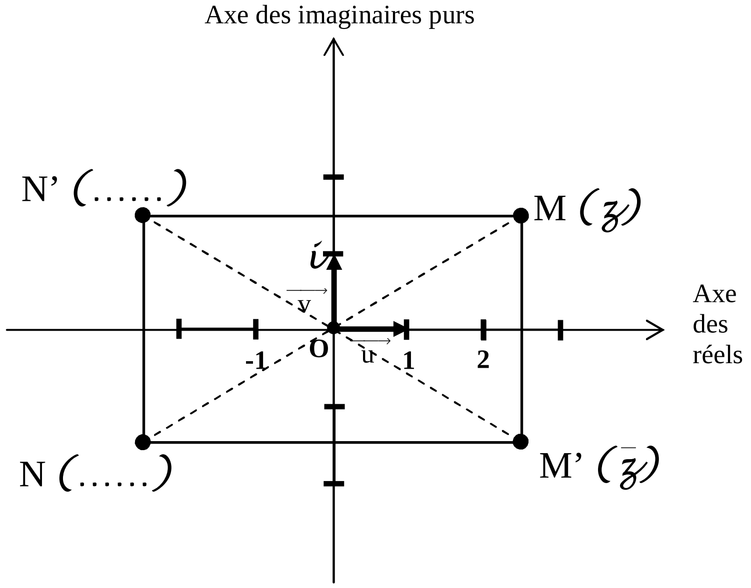
Exemple : Dans un plan complexe représenter les points I($3 + 2i$) K($-4 - 2i$) L($-3i$) M(5).



C. Conjugué d'un nombre complexe :

Définition 6 : Soit $z = x + iy$ un nombre complexe (x, y réels).

On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ (« z barre ») défini par $\bar{z}$ = ……….



Dans le plan complexe les points M et M' d'affixes respectives z et $\bar{z}$ sont ………………..

Propriété 2 :

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ …………………..
- z imaginaire pur $\Leftrightarrow$ …………………..

II OPÉRATIONS DANS $\mathbb{C}$:

A. Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$:

L'addition et la multiplication suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$ et on remplace i^2 par -1 .

En particulier :

- Les identités remarquables sont encore valables dans $\mathbb{C}$.
- $z \times z' = 0 \Leftrightarrow$ ……………………………………..
- $z^n =$ ……………………………………..

Propriété 3 : $z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = 0$ **et** $\mathrm{Im}(z) = 0$

Démonstration : C'est une conséquence directe de la propriété 1 avec ……………

Exemple 1 : Trouver deux nombres réels x et y tels que $2(x - 3iy) - (3x - 5iy) = 0$

Exemple 2 : Calculer $(5 + 3i)(-4 - 6i) =$ ………………..

$(2 + i)^3 =$ …………

$(2 - i)^3 =$ …………

Soit $z = x + iy$ alors $z \times \bar{z} =$ ……..……………………………………..

Remarque : Le produit $z \times \bar{z}$ est un nombre ……..

De plus $z \times \bar{z} =$ …………..

B. Inverse et Quotient dans $\mathbb{C}$:

Tout nombre complexe non nul ($z \neq 0$ ») admet un inverse :

Soit $z = x + iy$ tel que $z \neq 0$ alors :

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}$$

Pour donner la forme algébrique de z^{-1} il faut rendre le dénominateur réel, l'astuce consiste à utiliser la remarque ci-dessus.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} \times \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} + i\,\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$ (forme algébrique de z^{-1})

Pour obtenir $\frac{1}{z}$ *et* $\frac{z'}{z}$ *sous forme algébrique on multiplie* ……………………………………..
……

Exemples : Donner la forme algébrique de $(3 - 5i)^{-1}$; $\frac{2 + 6i}{5 - 3i}$; $\frac{2}{5i}$

C. Propriétés de la conjugaison :

Propriété 4 :

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ et $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
- Si $z' \neq 0$ alors : $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \left(\frac{1}{\bar{z'}}\right)$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \left(\frac{\bar{z}}{\bar{z'}}\right)$
- Si $z' \neq 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

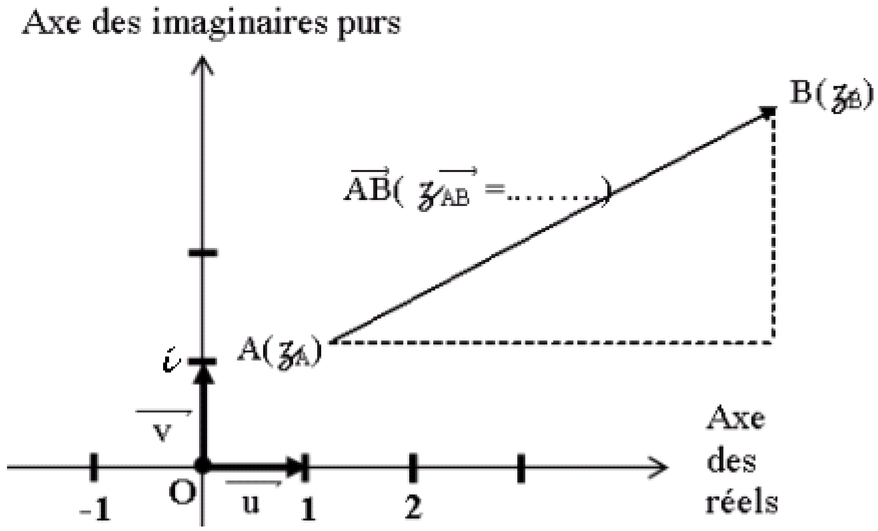
Démonstration :

Exemple : Trouver le nombre complexe z tel que : $5\bar{z} + 3 - 2i = i\bar{z}$

D. Affixe d'un vecteur, d'un barycentre :

Définition 7 :
- Lorsque O est l'origine du repère le point M et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ ont la même affixe z_M.

Propriété 5 :



- Si A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}}$=.........

Démonstration :

Exemple : Dans le plan complexe $4 + 2i$, $3 - i$, $1 + 3i$ et $2 + 6i$ sont les affixes respectives des points A, B, C et D. Montrez que ABCD est un parallélogramme.

Rappel : *Définition du barycentre*
G = bar { (A ; α)(B ; β)(C ; γ)}$_{\alpha+\beta+\gamma\neq 0}$ ⇔ ....

Propriété 6 :
Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives z_A , z_B et z_C.
L'affixe z_G du point G défini par G = bar { (A ; α)(B ; β)(C ; γ)}$_{\alpha+\beta+\gamma\neq 0}$ est :

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Démonstration :

Exemple : Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.
Quelle est l'affixe z_I du point I, milieu de [AB] ?

z_I = ...

III Equation du second degré à coefficients réels

Théorème :

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b, c réels et $a \neq 0$) de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ admet :

- Si $\Delta = 0$, une unique solution réelle $z_0 =$ ……………
- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles $z_1 =$ ………………… et $z_2 =$ ………………
- Si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$z_1 =$ ………………… et $z_2 =$ ………………

Démonstration : *(Revoir la démonstration faite en 1°S sur www.webclasse.fr)*

Exemple 1 : Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $2z^2 + 3z + 5 = 0$

Exemple 2 : Soit le polynôme $\mathcal{P}$ défini sur $\mathbb{C}$, par : $\mathcal{P}(z) = 2z^3 - 3z^2 + 3z - 2$

a) Vérifiez que $\mathcal{P}$ admet le réel 1 comme racine.

b) Trouvez 3 réels a, b et c tels que $\mathcal{P}(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c)$

c) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathcal{P}(z) = 0$.

Exemple 3 : Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$

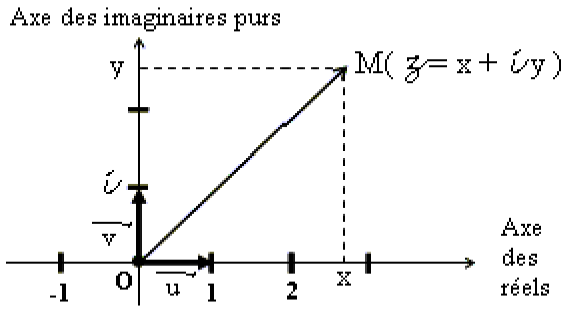
IV Module et arguments :

Dans tout ce paragraphe, le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$)

A.Module d'un nombre complexe :

Raffaelle Bombelli (1526-1572) introduit la notion de module et Argand en inventa le nom.

Rappel :



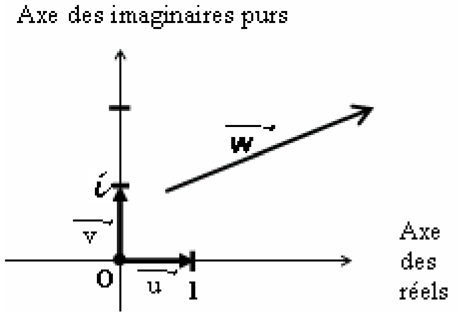
- La distance OM est appelée …………….. de z_M . On note $|z_M| = OM$.
- Par conséquent si $z = x + iy$ alors $|z| =$……………………

Exemples : $|1 - 2i| =$ …….. $\left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| =$ …….. $|-6i| =$ ……..

$|-5| =$ …….. = ……….

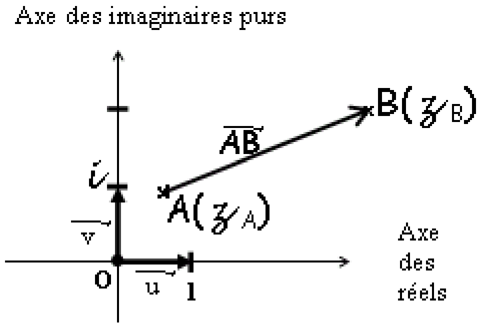
Module ………………

Cas des vecteurs :



Soit $\vec{w}$ le vecteur d'affixe $z_{\vec{w}}$.

On a $\|\vec{w}\| = |\ z_{\vec{w}}\ |$

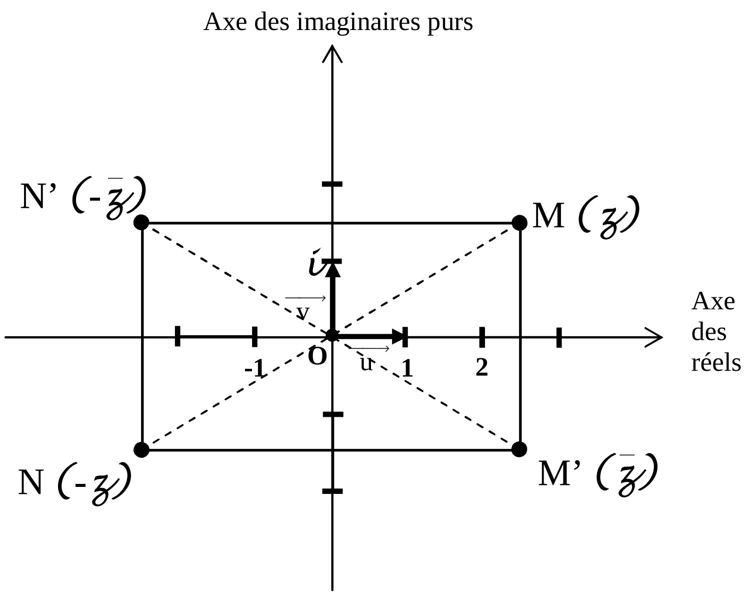


La longueur AB est donnée par

AB = ……………………………..

Exemple : Dans le plan complexe, trouvez l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|\ z + 1 - i| = 3$

Propriété 7:



- $z \times \bar{z} =$ …….
- $|\bar{z}| =$ …….
- $|-\ z| =$ …….
- $|z| = 0 \Leftrightarrow$ ………

- $|z| \times |\bar{z}| =$ …….
- Si $z \neq 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $|z^n| =$ …….

- Si $z' \neq 0$ alors $\left|\dfrac{1}{z'}\right| =$ ……….. et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| =$ ………..

Exemple : Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

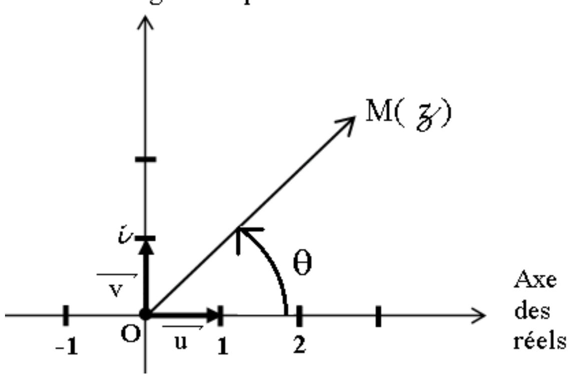
a) $|\bar{z} + 2i| = 5$ b) $|\ z - 3 + 4i| = 0$ c) $|\ -2iz - 5 + 4i| = 3$ d) $\left|\dfrac{z - 5 + 6i}{z - 4}\right| = 1$

Propriété 8 : *inégalité triangulaire*

B. Arguments d'un nombre complexe non nul :

Rappels de trigonométrie : *Voir ci-contre et revoir le cours de première S.*

Définition :



- On appelle *argument* de z et on note arg z toute mesure de l'angle orienté ($\vec{u}$; $\overrightarrow{OM}$).

- Soit θ un argument de z alors :

  arg z = ………………………

  arg z = ………………………

Exemple : *Compléter*

• arg (1) = …………• arg (-3) =………… • arg (i) = …………… arg (1+i) = ……………

⚠ *O n'a pas d'argument !*

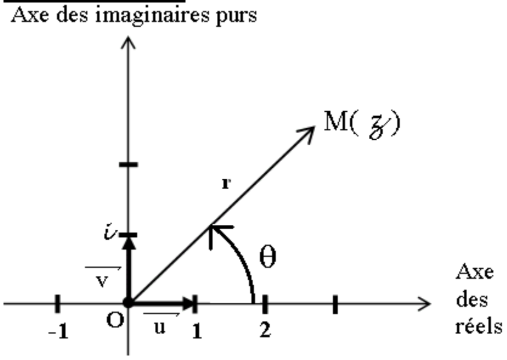
Propriété 9 :

- z est un réel non nul positif ($z \in \mathbb{R}_+^*$) ⇔ arg z =…………………
- z est un réel non nul négatif ($z \in \mathbb{R}_-^*$) ⇔ arg z =…………………
- z est un réel non nul ($z \in \mathbb{R}^*$) ⇔ arg z =…………………
- z est un imaginaire pur non nul ⇔ arg z =…………………

Coordonnées polaires :

Le repérage par coordonnées polaires existe depuis environ mille ans, il est très utilisé en astronomie et en géographie (polaire vient du latin polus et du grec polos qui signifient « tourner »).

Définition :



Le couple (r = OM ; θ) s'appelle …………………………..

Propriété 10 : Si le point M d'affixe z a pour coordonnées polaire (r ; θ) alors z =………………….. cette expression est appelée ....de z.

Démonstration :

Propriété 11 : *Lien entre forme algébrique (.....................) et forme trigonométrique*

Si on connait r et θ alors $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

Si on connaît x et y alors $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ et θ est défini par :

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r}$.

Exemples :

1) Donner la forme trigonométrique de $z = -\sqrt{3} + i$

2) Donner la forme trigonométrique de $z = -2\left[\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]$

Propriété 12 :

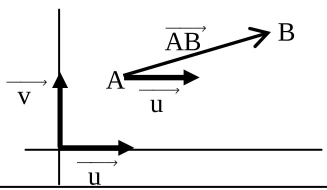
Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec **r > 0**, alors $|z| = r$ et $\theta = \arg z + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Propriété 13 :

- $\arg(\bar{z}) =$ …………
- $\arg(-z) =$ …………
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) =$ …………

Démonstration :

Propriété 14 :



$(\vec{u} ; \overrightarrow{AB})$ **= arg** $[2\pi]$

Exemple : Trouver l'ensemble des points M (z) tels que $\arg(\bar{z} - 4 - 5i) = \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$

Propriété 15 :

- $\arg(z^n) =$ …………
- $\arg(z \times z') =$ ……...…………
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) =$ ……………………

Démonstration :

Exemple :

On pose $z_1 = -\sqrt{3} + i$ et $z_2 = 1 - i$.

1) Donner la forme trigonométrique de

$Z = \frac{z_1}{z_2}$.

2) En déduire $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.

Exemple :

Calculer $(1+i)^{1000}$.

Propriété 16 :

Si A, B, C et D sont des points deux à deux distincts d'affixe respectives z_A, z_B, z_C et z_D

alors $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) =$

Démonstration :