TS 3 – DM n°2 – pour le mardi 21 septembre 2010-09-11

Equations P(z) = 0 avec P polynôme.

Partie A : *Polynômes de degré trois : exemple*
On se propose de résoudre dans **C** l'équation $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$ (E)

1. Pourquoi existe-t-il un polynôme Q de degré 2 tel que l'équation précédente s'écrive $(z + 1)Q(z) = 0$?

2. Déterminer Q(z) puis résolvez l'équation Q(z) = 0 et l'équation (E).

3. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de trois points A, B et C.
Démontrez que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B : *Solutions conjuguées*

P est un polynôme complexe à coefficients réels défini par :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

Supposons que z_0 est un complexe solution de P(z) = 0, c'est à dire que $P(z_0) = 0$.

1.a) Démontrez que $\overline{P(z_0)} = P(\overline{z_0})$.
b) Déduisez-en que $\overline{z_0}$ est aussi solution de l'équation P(z) = 0.

2. Lorsque z_0 est un nombre complexe, pourquoi alors $P(z) = (z - z_0)Q(z)$?

Partie C : *Applications*

On se propose de résoudre dans **C** l'équation $z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = 0$. (E')

1. Vérifier que $i\sqrt{3}$ est solution de cette équation.

2. Pourquoi existe-t-il un polynôme Q de degré 2 tel que l'équation (E') s'écrive :
$(z^2 + 3)Q(z) = 0$?

3. Résolvez alors l'équation proposée et démontrez que si les solutions de (E') sont les affixes de quatre points A, B, C et D alors ces points sont sur un cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.