

Suites associées

Énoncé

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 20 \\ b_0 = 60 \end{cases} \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{4} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{4} \end{cases}$$

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice, calculer les 50 premiers termes des suites (a_n) et (b_n) .
2. Peut-on penser que ces suites sont convergentes et quelle conjecture peut-on formuler quant à la limite de la suite (a_n) et à celle de la suite (b_n) ?

Appeler l'examineur pour vérifier les calculs et les conjectures.

3. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies, pour tout entier naturel n , par :

$$u_n = a_n + b_n \quad \text{et} \quad v_n = b_n - a_n.$$

- (a) Compléter la feuille de calculs avec les 25 premiers termes des suites (u_n) et (v_n) .
- (b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature de chacune de ces suites ?

Appeler l'examineur pour valider la conjecture et lui indiquer comment mettre en place la vérification demandée à la question suivante.

- (c) Vérifier expérimentalement, sur la feuille de calcul, la conjecture émise, validée par l'examineur.

Appeler l'examineur, lui montrer les vérifications faites et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

4. (a) Démontrer la conjecture de la question 3(b).
- (b) Déterminer les expressions de a_n et b_n en fonction de n .
- (c) Justifier les réponses données à la question 2 et déterminer la valeur exacte de la limite des suites (a_n) et (b_n) .

Production demandée

- Construction de la feuille de calcul complète ;
- Formulation orale des conjectures ;
- Réponses argumentées à la question 4.