

Calcul approché d'une intégrale

Énoncé

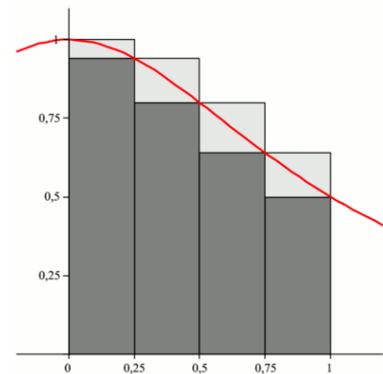
On considère l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$, où la fonction f est définie, pour tout nombre réel x , par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. I est une intégrale dont on ne sait pas, en terminale S, calculer la valeur exacte.

Le but de l'exercice consiste donc à en déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} .

Pour cela on convient d'appliquer une méthode dite des « rectangles » et de partager l'intervalle $[0, 1]$ en n intervalles de même amplitude, n étant un entier naturel non nul.

1. Dans cette question on donne à n la valeur 4. Quel encadrement de l'intégrale I le dessin ci-contre suggère-t-il ? Quelle est l'amplitude de cet encadrement ?

Faire calculer cet encadrement par la calculatrice ou le tableur.



Appeler l'examineur pour une vérification de l'encadrement trouvé.

2. On souhaite pouvoir généraliser, à n entier naturel non nul quelconque, l'encadrement obtenu dans le cas où $n = 4$.
 - (a) Modifier l'organisation du calcul pour obtenir l'encadrement de I et son amplitude dans le cas où $n = 10$ puis où $n = 20$.

Appeler l'examineur pour une vérification de l'automatisation effectuée.

- (b) Conjecturer une valeur de n à partir de laquelle l'encadrement de I obtenu a une amplitude inférieure ou égale à 10^{-2} .

Appeler l'examineur pour lui indiquer la conjecture émise et lui indiquer les méthodes envisagées pour la question suivante.

3. Proposer des éléments permettant de justifier que, pour la valeur trouvée en 2.(b), l'amplitude de l'encadrement est bien inférieure ou égale à 10^{-2} .

Production demandée

- Encadrements de I obtenus sur calculatrice ou tableur pour les valeurs de n demandées.
- Stratégie de démonstration du résultat conjecturé à la question 2.(b).