Investigations autour d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -2xy$.

Dans une première partie, la méthode d'Euler nous donnera une approximation sur $\mathbb{R}^+$ d'une fonction f solution qui vaut 1 en 0.

Dans une deuxième partie nous vérifierons qu'une fonction donnée est solution et nous comparerons à l'approximation trouvée en première partie.

1. On se donne un pas h strictement positif et deux suites (x_n) et (y_n) définissant une suite de points M_n de coordonnées (x_n, y_n) où :
   - $x_0 = 0$, $x_{n+1} = x_n + h$
   - $y'_n = 2x_n y_n$
   - $y_0 = 1$ et $y_{n+1} = y_n + hy'_n$.

   Les termes y_n sont des approximations de $f(x_n)$ par la méthode d'Euler.

   (a) À l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, faire apparaitre les valeurs approchées à 10^{-2} près de x_n et de y_n pour un pas h valant 0,1.

n	x_n	y_n	y'_n
0	0	1	0
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			

   (b) À l'aide du grapheur ou de la calculatrice, représenter la suite des points M_n.

2. (a) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x^2}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = -2xy$.

   (b) En posant pour tout réel x, $h(x) = e^{x^2} g(x)$, montrer que h est une fonction constante et que g est la seule solution de l'équation telle que $g(1) = 0$.

3. Tracer à l'aide du grapheur ou de la calculatrice la courbe de f et comparer avec l'approximation obtenue dans la question 1).