

PROBABILITES : CONDITIONNEMENT ET INDEPENDANCE

Historique :

En 1654 le chevalier de Méré pose le problème suivant au mathématicien et philosophe **Pascal** :
« Deux joueurs ont commencé un jeu en plusieurs manches. Ils ont misé chacun 32 pistoles. Le premier qui gagne trois manches remporte la partie et les 64 pistoles mises en jeu. La partie est interrompue alors que l'un des joueurs avait gagné deux manches et l'autre une seule, comment répartir les 64 pistoles ? »

Pascal et **Fermat** échangèrent de nombreuses lettres sur ce problème et feront ainsi naître la théorie mathématiques des probabilités.

Aujourd'hui on utilise les probabilités dans les domaines suivants (entre autres) :

- En médecine : probabilité qu'un individu soit malade suivant ses symptômes, évaluation du risque de trisomie chez un nouveau né d'après la mesure de sa nuque...
- En bourse : Black, Merton et Scholes ont eu le prix Nobel en 1997 grâce à leur théorie et à une formule permettant de limiter grandement les risques pris pour la banque.
- En physique : la mécanique quantique décrit le mouvement des plus petites particules par des lois probabilistes.
- Dans le domaine des assurances : le tarif demandé dépend de la probabilité que vous ayez un accident suivant votre âge, votre lieu d'habitation...
- Dans les sondages d'opinion : Pour trouver avec quelle marge d'erreur un échantillon est représentatif.
- En mathématiques : Pour calculer une aire avec la méthode de Monte-Carlo, pour tester si un nombre est premier ou pas...

I Rappels :

Pour bien démarrer : exercices 1, 2, 3 et 4 p 354 .

A. Vocabulaire

Définition 1 : Univers

L'**univers**, souvent noté Ω est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Exemple 1 :

L'expérience aléatoire est la suivante : « On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. »

1) Quel est l'**univers** Ω ?

$\Omega = \{ \dots \}$

2) Quel est son cardinal ?

$\text{card } \Omega = \dots$

3) Citer un événement élémentaire de l'univers Ω .

Exemple 2 :

L'expérience aléatoire est la suivante : « On lance successivement deux dés à 6 faces. »

1) Quel est l'**univers** Ω ?

$\Omega = \{ \dots \}$

2) Quel est son cardinal ?

$\text{card } \Omega = \dots$

3) Citer un événement élémentaire de l'univers Ω .

Définition 2 :

Si $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ est l'**univers** lié à une expérience aléatoire :

- Une partie de Ω est appelée **événement**.
- $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \dots, \{k\}$ sont des **événements élémentaires**.

Propriété 1 :

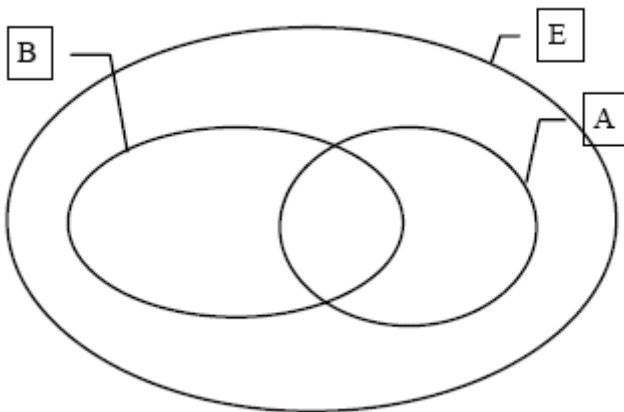
- La somme des probabilités sur une partition de Ω est égale à 1.
par exemple si $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ alors $p(\{a, b, c\}) + p(\{d, e, f, g, h\}) + p(\{i, j, k\}) = 1$
ou encore $p(\{a\}) + p(\{b, c, d\}) + p(\{d, e, f, g\}) + p(\{h, i, j, k\}) = 1$
- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent, par exemple $p(\{d, e, f, g\}) = p(\{d\}) + p(\{e\}) + p(\{f\}) + p(\{g\})$.
- Formule :** Dans une situation d'équiprobabilité, de parfait hasard la probabilité d'un événement E est :
$$p(E) = \frac{\text{card } E}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$
- Pour tout événement A : **$0 \leq P(A) \leq 1$**

Exemple :

L'expérience aléatoire est la suivante : « On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. »

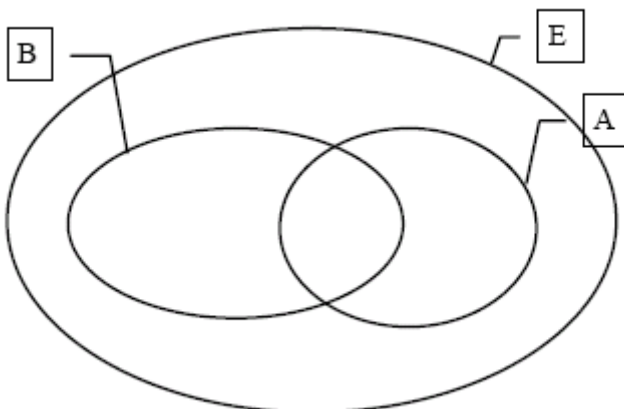
- 1) Quelle est la probabilité d'obtenir un roi ?
- 2) Quelle est la probabilité d'obtenir un cœur ?
- 3) Quelle est la probabilité d'obtenir un roi ou un cœur ?
- 4) Quelle est la probabilité d'obtenir un roi et un cœur ?

B. Réunion et intersection



$A \cap B$: on lit « A inter B »

- Eléments communs à A et B.
- Eléments qui sont à la fois dans A **et** dans B.



$A \cup B$: on lit « A union B »

- Eléments obtenus en réunissant A et B.
- Eléments qui sont dans A **ou** dans B.

Propriété 2 :

- Si A et B sont deux événements incompatibles (sans éléments communs) alors :
$$p(A \cup B) = P(A) + p(B)$$
- Dans tous les cas : **$p(A \cup B) = P(A) + p(B) - p(A \cap B)$**

Exemples :

① Dans un groupe de 600 personnes on distingue : les personnes portant des lunettes, L , et les personnes portant une cravate, C . Parmi ces personnes, 150 ne portent ni cravate, ni lunettes. On choisit au hasard une personne parmi les 600.

1. Calculer la probabilité de l'événement $L \cup C$.

2. Sachant que $p(L) = 0,5$ et $p(C) = 0,3$, calculer la probabilité que la personne choisie porte des lunettes et une cravate.

② Une urne contient 40 boules numérotées de 1 à 40. On choisit au hasard une boule dans cette urne. On considère les événements :

A : « le numéro de la boule tirée est inférieur ou égal à 30 » ;

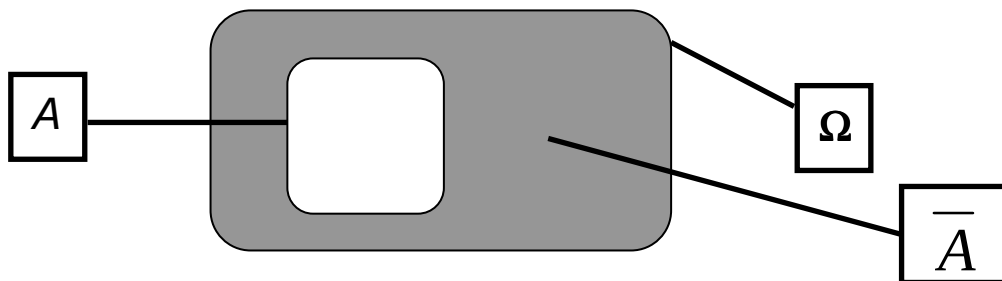
B : « le numéro de la boule tirée est supérieur ou égal à n », où n est un entier naturel compris entre 1 et 30.

1. Quel est l'événement $A \cup B$? En déduire $p(A \cup B)$.

2. Sachant que $p(A \cap B) = 0,15$ en déduire la valeur de l'entier n .

C. Événement complémentaire :

A retenir : *Lorsque l'on décrit un événement contraire, on ne nie pas l'action, mais le résultat de l'action* : le contraire de " tirer une carte de cœur " n'est pas " ne pas tirer une carte de cœur ", mais " tirer une carte autre que du cœur ", c'est à dire " tirer une carte de carreau, de pique, ou de trèfle ".



- L'événement contraire (au sens de complémentaire) de A se note $\bar{A}$ et on a les 2 formules : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ et $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

événement	événement complémentaire
au moins un ●●●	aucun ●●●
●●● ou ♣♣♣	ni ●●●, ni ♣♣♣
●●● et ♣♣♣	non ●●● ou non ♣♣♣
au moins ●●●	moins de ●●●
uniquement des ♣♣♣	au moins un(e) différent(e) de ♣♣♣

Exemple 1 :

Dans chacun des cas suivants décrire l'événement $\bar{A}$ contraire de A par une phrase sans négation.

- A une loterie, Aurore achète trois billets. A ="l'un des billets au moins est gagnant"; $\bar{A}$ =.....
- Au restaurant Béatrice commande un plat et un dessert. A ="Béatrice ne commande ni viande ni glace". $\bar{A}$ =.....
- Dans un jeu, on peut gagner de 0 à 100 euros, ou perdre 60 euros. A ="gagner au moins 20 euros à ce jeu"; $\bar{A}$ =..... (Attention de ne rien oublier.)
- Didier tire trois cartes d'un jeu de 32 cartes. A =" tirer trois cartes de cœur"; $\bar{A}$ =.....

Exemple 2 :

① Soit l'événement A ="obtenir les 6 bons numéros au loto en jouant 6 numéros".

a) Calculer $p(A)$.

b) Exprimer par une phrase sans négation l'événement contraire et calculer sa probabilité.

② Soit l'événement B ="obtenir 3 as en tirant quatre cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes".

a) Calculer $p(B)$.

b) Exprimer par une phrase sans négation l'événement contraire et calculer sa probabilité.

Exemple 3 :

Parmi les élèves d'un lycée, 54% ont pratiqué le ski, 32% ont pratiqué la voile et 13% ont pratiqué ces deux sports.

On interroge au hasard un élève. Quelle est la probabilité qu'il n'ait jamais pratiqué ni le ski ni la voile ?

Exemple 4 :

Compléter $\overline{A \cup B} = \dots\dots\dots$

D. Variable aléatoire :

Définition 1 : Variable aléatoire (v.a.)

Une variable aléatoire est une fonction X définie sur l'univers Ω . On a $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemple :

On lance deux dés non truqués. On gagne 5 € lorsque leur somme vaut 6, 20 € si on a un double 6 et on perd 2 € sinon.

L'objectif est de savoir si le jeu est favorable pour le joueur.

- 1) Quel est l'univers Ω ?
- 2) Quelle est la probabilité de gagner 5 €, de gagner 20 €, de perdre 2 € ?
- 3) On définit la variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui donne le gain (éventuellement négatif) du joueur en fonction de son lancer.
 - a) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?

.....
On écrira $X \in \{\dots\dots\dots\}$

- b) Compléter :
 $P(X=5)=\dots\dots\dots$
 $P(X=20)=\dots\dots\dots$
 $P(X=-2)=\dots\dots\dots$

Traduire par une phrase l'événement : $\{X \neq 5\} \cap \{X \neq 20\} \cap \{X \neq -2\}$
.....
Compléter : $P(\{X \neq 5\} \cap \{X \neq 20\} \cap \{X \neq -2\}) = \dots\dots\dots$

Définition 2 : Loi d'une variable aléatoire discrète

La loi de probabilité d'une variable aléatoire est la probabilité de chacune des valeurs x_i que peut prendre X .

Suite de l'exemple :

Dans la question 3b) de l'exemple ci-dessus on a en fait obtenu la loi de probabilité de la v.a. X . On présente en général les résultats sous forme de tableau :

Valeurs x_i de X			
$p_i = P(X=x_i)$			

Définition 3 : Espérance d'une variable aléatoire discrète

L'espérance d'une variable aléatoire discrète X , notée $E(X)$ est la moyenne pondérée des valeurs que prends la v.a. X . Autrement dit : $E(X) = \sum_i p(X = x_i) \times x_i$

Remarque :

L'espérance correspond au gain moyen que peut espérer obtenir le joueur.

Suite de l'exemple :

- 4) Calculer $E(X)$. Le jeu est-il favorable pour le joueur ?

Définition 3 : Paramètre de dispersion

- Si on pose $m=E(X)$ et $p_i= P(X=x_i)$. On définit la **variance** $V(X)$ d'une variable aléatoire par :

$$\sum_i p_i (x_i - m)^2 = \left(\sum_i p_i x_i^2 \right) - m^2$$

- On définit **l'écart-type** σ qui sert à mesurer la dispersion des valeurs autour de leur moyenne par $\sigma = \sqrt{V}$

Exemple 2 : Retour sur le problème historique

« Deux joueurs ont commencé un jeu en plusieurs manches. Ils ont misé chacun 32 pistoles. Le premier qui gagne trois manches remporte la partie et les 64 pistoles mises en jeu.

La partie est interrompue alors que l'un des joueurs avait gagné deux manches et l'autre une seule, comment répartir les 64 pistoles ? »

Pour résoudre ce problème, on suppose qu'il y ait une manche additionnelle.

On appelle X la variable aléatoire associée au gain du premier joueur à l'issue de cette manche fictive et on calcule $E(X)$.

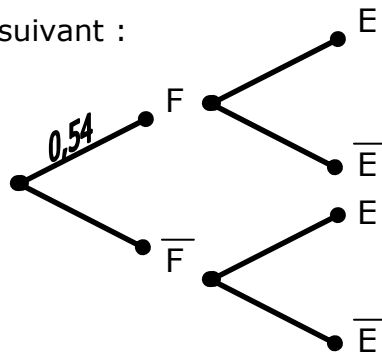
II Probabilité conditionnelle :

Activité :

Dans un lycée 54% des élèves sont des filles,
72% des filles sont externes et 76% des garçons sont externes.
On interroge un élève au hasard, on appelle :

- F l'événement : « l'élève interrogé est une fille »
- E l'événement : « l'élève interrogé est externe ».

1) Compléter l'arbre pondéré suivant :



2) On note $P_F(E)$ la probabilité que l'élève soit externe sachant que c'est une fille, compléter : $P_F(E) = \dots\dots\dots$

3) De même décrire et calculer $P_{\bar{F}}(E)$.

.....

5) Soit N le nombre d'élève du lycée :

- Calculer en fonction de N le nombre de filles externes.
- En déduire $P(F \cap E)$
- Trouver une relation entre $P_F(E)$, $P(F \cap E)$ et $P(F)$.

Définition :

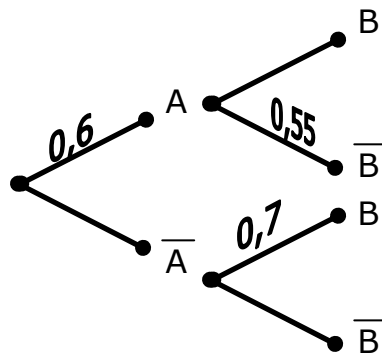
Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé est le nombre $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Remarque : Par conséquent on a aussi $P(A \cap B) = \dots\dots\dots$

Arbres et probabilités conditionnelles :

Compléter l'arbre suivant :



Compléter : $P_A(B) = \dots\dots\dots$; $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \dots\dots\dots$;

$P(A \cap B) = \dots\dots\dots$; $P(A \cap \bar{B}) = \dots\dots\dots$;

$P(\bar{A} \cap B) = \dots\dots\dots$; $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \dots\dots\dots$

$\dots\dots = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ donc $P(A) = \dots\dots\dots$

Propriétés :

- La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à $\dots\dots\dots$
- La probabilité de l'événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités des branches de ce chemin.

Exemple :

Dans une population, 70 % des familles ont une voiture, 85% des familles ont une télévision et 12% n'ont ni voiture ni télévision.

On choisit une famille au hasard :

- 1) Quelle est la probabilité qu'elle ait une voiture sachant qu'elle possède une télévision ?
- 2) Construire un arbre correspondant à cette expérience.

III Indépendance :

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Propriété

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$:

A et B indépendants $\Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$ (la réalisation de B ne dépend pas de A)

A et B indépendants $\Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$

démonstration :

Exemple :

On lance successivement deux dés à 6 faces quelle est la probabilité d'obtenir un double six ?

Indépendance de deux variables aléatoires

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. L'ensemble Ω des issues est donc l'ensemble de ces 32 cartes.

➤ On définit sur Ω **la variable aléatoire X** ainsi :
 $X(\text{Valet}) = 1$; $X(\text{Dame}) = 2$; $X(\text{Roi}) = 3$; $X(\text{As}) = 4$ et $X = 0$ sinon.

➤ On définit sur Ω **une seconde variable aléatoire Y** ainsi :
 $Y(\text{Trèfle}) = Y(\text{Carreau}) = 1$; $Y(\text{Cœur}) = 2$ et $Y(\text{Pique}) = 3$.

① A quelles cartes du jeu correspondent les événements suivants :

- $\{X = 2\} \cap \{Y = 3\}$:
- $\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}$:
- $\{X = 0\} \cup \{Y = 1\}$:

② Calculer les probabilités $P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$ et compléter le tableau ci-dessous :

$X \backslash Y$	$y_1 = 1$	$y_2 = 2$	$y_3 = 3$
$X_1 = \dots$			
$X_2 = \dots$			
$X_3 = \dots$			
$X_4 = \dots$			
$X_5 = \dots$			

définition : Définir la loi du couple $(X ; Y)$ c'est donner (éventuellement sous forme de tableau) c'est donner les probabilités p_{ij} de chaque événement $\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}$.

③

a) Ecrire plus simplement l'événement suivant :

$(\{X = 3\} \cap \{Y = 1\}) \cup (\{X = 3\} \cap \{Y = 2\}) \cup (\{X = 3\} \cap \{Y = 3\}) = \dots$

b) En déduire p_4 dans le tableau ci-dessous que vous terminerez de compléter :

$X \backslash Y$	$y_1 = 1$	$y_2 = 2$	$y_3 = 3$	Loi de X	
$X_1 = \dots$					p_1
$X_2 = \dots$					p_2
$X_3 = \dots$					p_3
$X_4 = \dots$					p_4
$X_5 = \dots$					p_5
Loi de Y					
	p'_1	p'_2	p'_3		

④ Compléter :

Définition :

Dire que les variables X et Y sont indépendantes signifie que **pour tout i et j**, les événements $\{X = x_i\}$ et $\{Y = y_j\}$ sont indépendants autrement dit que :

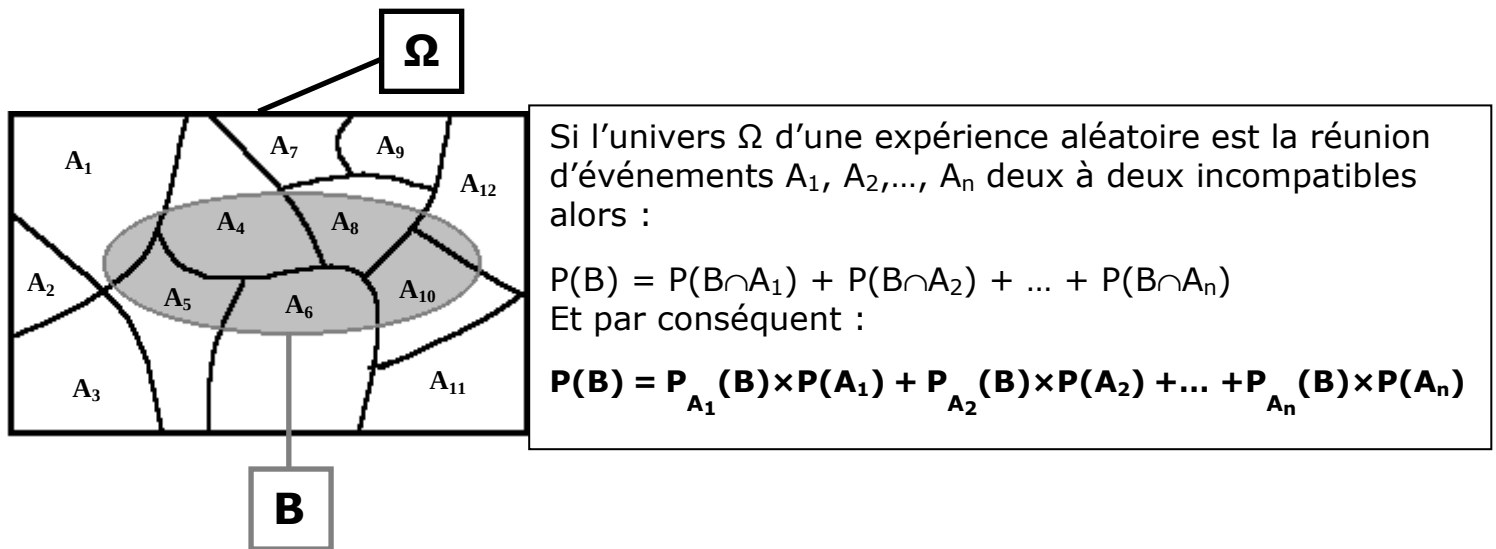
.....

ou encore avec les notations précédentes : $p_{\dots} = \dots$

⑤ Les variables X et Y étudiées sont-elles indépendantes ?

IV Formule des probabilités totales :

Formule des probabilités totales :



Remarques :

- 1) On dit que les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ disjoints deux à deux et non vides forment une partition de l'univers Ω lorsque leur union donne Ω .
- 2) Certains des événements $B \cap A_i$ peuvent être vides.

Démonstration :

Exemple 1 :

Une urne contient 15 boules : 8 vertes (V), 5 noires (N) et 2 rouges (R). On effectue deux tirages successifs sans remise et au hasard et on note dans l'ordre le résultat obtenu. On se propose de trouver la probabilité de l'événement noté R_2 : « **tirer une boule rouge au deuxième tirage** ».

- 1) **Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.**

- 2) **En déduire $p(R_2)$.**

Conséquence : Sur un arbre pondéré la probabilité d'un événement B est la somme des probabilités qui aboutissent à B.

Exemple 2 :

Dans une population la probabilité de naissance d'un garçon est de 0,52. On sait que 2% des filles et 1% des garçons présentent une luxation de la hanche à la naissance. On choisit un nouveau né au hasard.

- 1) Quelle est la probabilité qu'il souffre de cette luxation ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'un bébé atteint soit une fille ?

Exemple 3 : INVERSER UN ARBRE DE PROBABILITE

Voir activité 1 p 362

Exemple 4 : formule de BAYES (1763)

- 1) Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.

Démontrer la relation dite « **formule de BAYES** » : $P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A})}$

- 2) Application : On dispose de 100 dés cubiques dont 30 sont truqués. Un dé truqué donne la face six avec une probabilité de 0,5. On choisit au hasard un dé parmi les 100, on le lance et on obtient un 6.

Quelle est la probabilité que ce dé soit truqué ?

V Expériences répétées :

Définition :

Deux expériences aléatoires sont indépendantes si le résultat de l'une n'a aucune influence sur l'autre.

Exemple 1 :

Une urne contient 5 boules bleues et trois boules rouges.

On procède successivement à deux tirages **avec remise** (la première boule tirée est remise dans l'urne avant le second tirage).

Quelle est la probabilité de tirer successivement 2 boules bleues ?

.....
.....
.....
.....

Exemple 2 :

Une urne contient 5 boules bleues et trois boules rouges.

On procède successivement à deux tirages **sans remise** (la première boule tirée est remise dans l'urne avant le second tirage).

Quelle est la probabilité de tirer successivement 2 boules bleues ?

.....
.....
.....
.....

Propriété :

Lors de la répétition d'expériences aléatoires indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités de chacun de ces résultats.

Exemple :

On lance un dé cubique bien équilibré 10 fois de suite.

Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun six ?