TS spécialité – Résumé de cours n°1

Le cours est bien sûr à savoir mais il est indispensable de connaître par cœur un grand nombre de méthodes et d'exercices.

Sauf indications contraires les nombres utilisés sont des entiers

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

déf1 : a est *multiple* de b s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k\times b$

déf2 : On dit que « *b divise a* » et on notera b|a s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k\times b$

Rq : « b divise a » = « a est multiple de b »

Propriétés :

① pour tout entier n on a toujours 1|n, (-1)|n, n|n et (-n)|n.

② Les seuls diviseurs de 1 ou (-1) sont 1 et (-1).

③ Si (a|b et b|c) alors a|c (propriété de transitivité)

④ Si (a|b et b|a) alors a = b ou a = -b

⑤ Si (a|b et a|c) alors $a|[\alpha b + \beta c]$

Nombres premiers

déf1 : un entier naturel (positif) p est premier ssi il possède ***exactement*** 2 diviseurs positifs distincts (1 et lui-même).

Théorème :

① Tout entier naturel autre que 1 admet au moins un diviseur premier.

② L'ensemble *P* des nombres premiers est infini.

démo : la démonstration du ② est à connaître pour le BAC.

Propriété : Tout entier naturel non premier (composé) admet au moins un diviseur premier p tel que $p^2 \leq n$

Critère de Primalité : Si un entier naturel n n'est divisible par aucun nombre premier dont le carré est inférieur à n, alors n est un nombre premier.

Application : Le crible d'Erathostène, à savoir retrouver.

Décomposition en nombres premiers

déf : Tout entier naturel $n\geq 2$ s'écrit de manière unique sous la forme $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$ où $p_1 < \ldots < p_k$ sont des nombres premiers et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des entiers non nuls.

Théorème : $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$ possède $(\alpha_1 - 1)\times(\alpha_2 - 1)\times\ldots\times(\alpha_k - 1)$ diviseurs positifs.

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

déf1 (*dans $\mathbb{N}$*): a et b sont des entiers naturels, b est non nul

Il existe un unique couple (q ; r) d'entiers positifs tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

déf1 (*dans $\mathbb{Z}$*): a et b sont des entiers relatifs, b est non nul

Il existe un unique entier relatif q et un unique entier positif tels que :

$a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$

Rq : Ne pas oublier de vérifier l'inégalité du reste