TS spécialité – Résumé de cours n°2

Congruence dans $\mathbb{Z}$

Il est souvent utile de présenter les résultats sous forme de tableau pour les congruences

déf1 : n ≡ p [b] ssi il existe un entier q tel que n = q×b + p *(attention ce n'est pas une division euclidienne).*

déf2 : n ≡ p [b] ssi (n – p) est un multiple de b.

déf3 : n ≡ p [b] ssi n et p ont le même reste dans la division euclidienne par b.

Propriété de transitivité : Si n ≡ p [b] et p ≡ r [b] alors n ≡ r [b].

Régles de calculs :

① Si n ≡ p [b] et m ≡ q [b] alors n + m ≡ p + q [b].

② Si n ≡ p [b] et m ≡ q [b] alors n - m ≡ p - q [b].

③ Si n ≡ p [b] et m ≡ q [b] alors n × m ≡ p × q [b].

④ Si n ≡ p [b] alors $n^a \equiv p^a$ [b]. (a est un entier positif)

Rq : Les règles marchent avec le même modulo [b]; les divisions ne marchent pas !

PGCD – PPCM

PGCD

déf1 : on notera *D(a)* l'ensemble des diviseurs de a et *D(a ; b)* l'ensemble des diviseurs communs à a et b.

déf2 : pgcd(a ;b) est le plus grand élément de *D(a ;b)*

Par conséquent pour montrer que pgcd(a ; b)=pgcd(c ; d) on commencera par montrer que *D(a ; b)=D(c ; d)*

Propriétés :

① pgcd(a ; 0) = |a|

② Si b|a alors pgcd(a ; b) = |b|

③ Si r est le reste dans la division euclidienne de a par b alors pgcd(a ; b)=pgcd(b ; r)

④ pgcd(a ; b) = pgcd(|a| ; |b|)

⑤ pgcd(ka ; kb) = |k|×pgcd(a ; b)

Propriétés :

① Tout diviseur de a et b est un diviseur de pgcd(a ;b)

② Tout diviseur de pgcd(a ;b) est un diviseur de a et b.

③ Si g = pgcd(a ;b) alors *D(a ; b) = D(g)*

Théorème de Bézout

déf1 : deux entiers naturels sont premiers entre eux si leur pgcd est égal à 1.

Théorème de *Bézout* : a et b sont des entiers *strictement* positifs

Il existe 2 entiers u et v tels que au + bv = 1 ssi a et b sont premiers entre eux.

Théorème2 : pgcd(a ; b) = g ssi $\frac{a}{g}$ et $\frac{b}{g}$ sont premiers entre eux. ($g \neq 0$)

Théorème3 : Si pgcd(a ; b) = g alors il existe 2 entiers u et v tels que au + bv = g, la réciproque est fausse, il faut rajouter une condition :

Théorème4 : Si (au + bv = g et g divise a et b) alors pgcd(a ; b) = g.