Fiche de synthèse sur les suites

(niveau : première - chapitre : SUITES)

Sauf indication contraire les suites seront définies pour tout entier <u>naturel</u> n.

Comment montrer qu'une suite (U_n) est croissante ou décroissante ?

Attention on ne peut pas se contenter de calculer quelques termes !

<u>Rappel :</u> Dire qu'une suite (U_n) est croissante signifie que pour tout entier n, $U_{n+1} \geqslant U_n$.

Dire qu'une suite (U_n) est décroissante signifie que pour tout entier n, $U_{n+1} \leqslant U_n$.

On alors peut choisir l'une des deux méthodes suivantes :

On calcule la différence $U_{n+1} - U_n$:

- **Si pour tout entier n, $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$ alors la suite (U_n) est croissante.**
- **Si pour tout entier n, $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$ alors la suite (U_n) est décroissante.**

<u>Exemple :</u> Etudions le sens de variation de la suite (U_n) définie par $U_n = n^2 + 2$.

$U_{n+1} - U_n = [(n+1)^2 + 2] - [n^2 + 2]$
$U_{n+1} - U_n = [n^2 + 2n + 1 + 2] - [n^2 + 2]$
$U_{n+1} - U_n = [n^2 + 2n + 3] - [n^2 + 2]$
$U_{n+1} - U_n = n^2 + 2n + 3 - n^2 - 2$
$U_{n+1} - U_n = 2n + 1$
n étant un entier naturel, $2n + 1 > 0$ donc $U_{n+1} - U_n > 0$
La suite (U_n) est strictement croissante.

Si la suite (U_n) est à termes strictement positifs on peut calculer le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$:

- **Si pour tout entier n, $U_n > 0$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant 1$ alors la suite (U_n) est croissante.**
- **Si pour tout entier n, $U_n > 0$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant 1$ alors la suite (U_n) est décroissante.**

<u>Exemple :</u> Etudions le sens de variation de la suite (U_n) définie par $U_n = (0.5)^n$.

Puisque $0.5 > 0$ alors pour tout entier n $0.5^n > 0$ (on a élevé chacun des 2 membres à la puissances n)
Donc la suite (U_n) est à termes strictement positifs.
De plus :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{0.5^{n+1}}{0.5^n}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 0.5^{n+1-n}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 0.5^1$$

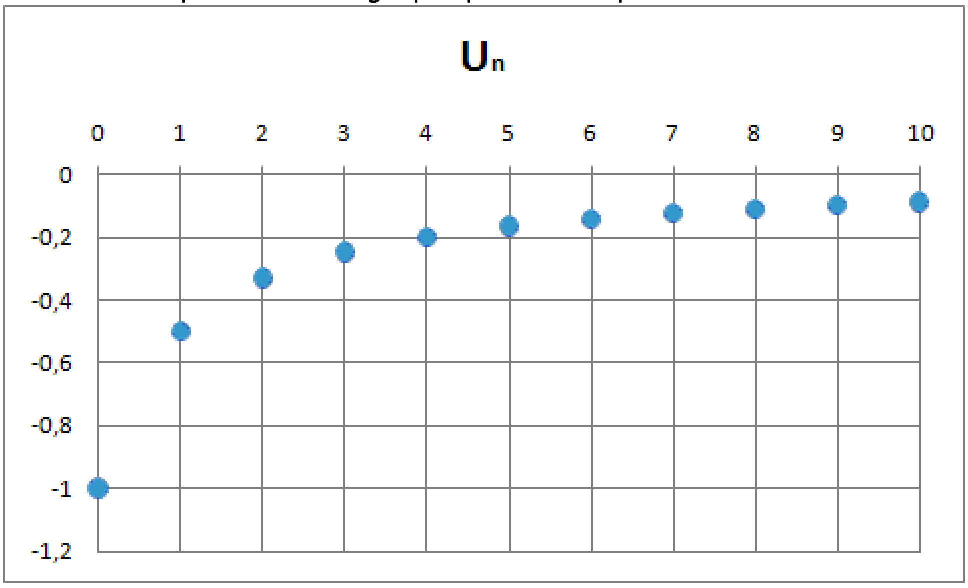
$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 0.5 < 1$$

Pour tout entier n, $U_n > 0$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ alors la suite (U_n) est strictement décroissante.

Existe-t-il des suites croissantes et négatives ?

Bien sûr, prenons par exemple la suite (U_n) définie par $U_n = -\dfrac{1}{n+1}$

- Cette suite est évidemment à termes négatifs.
- On montre avec l'une des méthodes précédentes qu'elle est croissante.
- Voici la représentation graphique de ses premiers termes :



Comment montrer qu'une suite (U_n) est arithmétique ?

On calcule la différence $U_{n+1} - U_n$, si cette différence est un réel ne dépendant pas de n (constant) alors la suite (U_n) est arithmétique.

Attention on ne peut pas se contenter de calculer quelques termes !

<u>Exemple :</u> Montrons que la suite (U_n) définie par $U_n = 5n + 3$ est arithmétique.
$U_{n+1} - U_n = [5(n + 1) + 3] - [5n +3]$.
$U_{n+1} - U_n = [5n + 5 + 3] - [5n +3]$.
$U_{n+1} - U_n = [5n + 8] - [5n +3]$.
$U_{n+1} - U_n = 5n + 8 - 5n - 3$
$U_{n+1} - U_n = 5$.

La différence $U_{n+1} - U_n$ est un réel ne dépendant pas de n (constant), donc la suite (U_n) est arithmétique de raison r=5 et de premier terme U_0= 3.

On peut remarquer que, graphiquement, les points représentant la suite (U_n) sont tous situés sur la droite d'équation y = 5x + 3

Comment montrer qu'une suite (U_n) est géométrique ?

Si pour tout entier n $U_n \neq 0$:

On calcule le quotient $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$, si ce quotient est un réel ne dépendant pas de n (constant) alors la suite (U_n) est géométrique.

Attention on ne peut pas se contenter de calculer quelques termes !

Si pour un entier p $U_p = 0$, la démarche est plus compliquée :
On vérifie que pour tout entier $n \geqslant p$ $U_n = 0$,
et que les termes U_n pour $n < p$ sont en progression géométrique.

<u>Exemple :</u> Montrons que la suite (U_n) définie par $U_n = 3^{2n}$ est géométrique.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3^{2(n+1)}}{3^{2n}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3^{2n+2}}{3^{2n}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 3^{2n+2-2n}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 3^2$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 9$$

Le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est un réel ne dépendant pas de n (constant) donc la suite (U_n) est géométrique,

de raison q=9 et de premier terme $U_0 = 3^0 = 1$

Existe-t-il des suites qui ne soient ni arithmétique ni géométrique ?

Bien sûr, prenons par exemple la suite (U_n) définie par $U_n = n^2 + 1$

- $U_0 = 0^2 + 1 = 1$; $U_1 = 1^2 + 1 = 2$; $U_2 = 2^2 + 1 = 5$.
- $U_1 - U_0 = 2 - 1 = 1$; $U_2 - U_1 = 5 - 2 = 3$.

Les différences n'étant pas constantes, la suite (U_n) n'est pas arithmétique.

- De même on montre que les quotients U_1/U_0 et U_2/U_1 ne sont pas constants.

Les quotients dépendent de l'indice n donc la suite (U_n) n'est pas géométrique.

Peut-on étudier rapidement le sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique ?

Pour une suite géométrique (U_n) de raison q et de premier terme positif :

- **Si $q > 1$ alors la suite (U_n) sera croissante.**
- **Si $q = 1$ alors la suite (U_n) sera constante.**
- **Si $0 < q < 1$ alors la suite (U_n) sera décroissante.**
- **Si $q < 0$ alors la suite (U_n) ne sera ni croissante ni décroissante mais alternée.**

Pour une suite arithmétique (U_n) de raison r :

- **Si $r > 0$ alors la suite (U_n) sera croissante.**
- **Si $r = 0$ alors la suite (U_n) sera constante.**
- **Si $r < 0$ alors la suite (U_n) sera décroissante.**

Comment obtenir un terme quelconque d'une suite arithmétique ou géométrique ?

Si pour une suite géométrique (U_n) de raison q on donne U_p et on cherche U_n :

On peut utiliser la formule suivante : $U_n = U_p * q^{(n-p)}$ en particulier $U_n = U_0 * q^n$
La même formule écrite différemment :

Terme cherché = terme donné * raison$^{(\textit{différence des rangs})}$

Si pour une suite arithmétique (U_n) de raison r on donne U_p et on cherche U_n :

On peut utiliser la formule suivante : $U_n = U_p + r*(n-p)$ en particulier $U_n = U_0 + r*n$
La même formule écrite différemment :

Terme cherché = terme donné + raison*(*différence des rangs*)

<u>Exemple 1 :</u>(U_n) est une suite géométrique telle que q = 2, U_7 = 5. Calculer U_{19}.

On peut utiliser la formule suivante : $U_n = U_p * q^{(n-p)}$
On obtient ainsi : $U_{19} = U_7 * 2^{(19-7)}$
Donc : $U_{19} = 5*2^{12}$
Donc : $U_{19} = 5*4096 = 20480$

<u>Exemple 2 :</u>(U_n) est une suite arithmétique telle que r = 8, U_{31} = 4. Calculer U_{133}.

On peut utiliser la formule suivante : $U_n = U_p + r*(n-p)$
On obtient ainsi : $U_{133} = U_{31} + 8*(133-31)$
Donc : $U_{133} = 4 + 8*102$
Donc : $U_{133} = 4 + 816 = 820$

Comment calculer la somme des termes d'une suite arithmétique ?

Si $S = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \dots + U_{n-1} + U_n$ est la somme de <u>(n-p+1)</u> termes d'une suite arithmétique, alors $S = \dfrac{(n-p+1)(U_p + U_n)}{2}$ ou la même formule écrite différemment :

$$S = \frac{(\text{nombre de termes de la somme})(\text{premier terme + dernier})}{2}$$

Comment calculer la somme des termes d'une suite géométrique ?

Si $S = V_p + V_{p+1} + V_{p+2} + \dots + V_{n-1} + V_n$ est la somme de <u>(n-p+1)</u> termes d'une suite géométrique, alors $S = V_p \times \dfrac{1 - q^{(n-p+1)}}{1 - q}$ ou la même formule écrite différemment :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{(\text{nombre de termes})}}{1 - q}$$