Formulaire : fonctions de plusieurs variables

Tous les rappels utiles pour les exercices (les résultats à démontrer dans les exercices n'y figurent pas).

0. Notations utilisées dans ce formulaire

- $v = (x, y, z)$ désigne un **point** (ou un vecteur) de $\mathbb{R}^3$; ses coordonnées sont x, y, z. Sa norme est $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, souvent notée r.
- $u = (u_1, u_2, u_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$, $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$; a et b sont **fixés** (ils ne dépendent pas de v).
- f, g, φ sont des fonctions **scalaires** : elles associent un *nombre* à chaque point, par exemple $\varphi(x, y, z) = x^2 y + z$.
- $F = (P, Q, R)$ et G sont des **champs de vecteurs** : ils associent un *vecteur* à chaque point, par exemple $F(x, y, z) = (xy\,;\, z\,;\, x^2)$.
- $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ forment la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$.
- Les multiplications de nombres sont notées $\times$. Le point de $\nabla \cdot F$ est une notation (voir §10).

1. Dérivées usuelles (fonctions d'une variable)

fonction	dérivée	fonction	dérivée	fonction	dérivée
x^n	$n\,x^{n-1}$	$u + v$	$u' + v'$	e^u	$u'\,e^u$
e^x	e^x	$k \times u$ (k constante)	$k \times u'$	$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$u \times v$	$u'v + uv'$	u^n	$n\,u'\,u^{n-1}$
$\sin x$	$\cos x$	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\cos x$	$-\sin x$			$\sin u$, $\cos u$	$u'\cos u$, $-u'\sin u$

2. Dérivées partielles

Définition. Pour $f(x, y)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t}$.

En pratique : on **fige** toutes les autres variables (elles se comportent comme des constantes) et on dérive par rapport à x avec les règles du §1. Un terme qui ne contient pas x a une dérivée nulle.

Exemple. $f(x, y) = 3x^2 y + 5y^3 - 2x$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - 2$ (y figé) et $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 15y^2$ (x figé).

Dérivées secondes. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big)$, etc.

Théorème de Schwarz. Si f est de classe C^2 : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$.

Domaine de définition. $\ln(U)$ exige $U > 0$; $\sqrt{U}$ exige $U \geq 0$; un quotient exige un dénominateur non nul.

Exemple. $\ln(x + y)$ est définie pour $x + y > 0$; $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ privé de $(0, 0)$.

3. Produit scalaire et norme

$\langle u, w \rangle = u_1 \times w_1 + u_2 \times w_2 + u_3 \times w_3$ (un **nombre**) ; $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

- $\langle u, w \rangle = \|u\| \times \|w\| \times \cos\theta$ (θ : angle entre u et w) ; $u \perp w \iff \langle u, w \rangle = 0$.
- Cauchy-Schwarz : $|\langle u, w \rangle| \leq \|u\| \times \|w\|$.
- Bilinéaire et symétrique : $\langle u + u', w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle u', w \rangle$, $\langle \lambda u, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle$, $\langle u, w \rangle = \langle w, u \rangle$.

Exemple. $\langle (1, -2, 3), (4, 0, -1) \rangle = 1 \times 4 + (-2) \times 0 + 3 \times (-1) = 1$; $\|(1, 2, 2)\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$.

4. Produit vectoriel (seulement dans $\mathbb{R}^3$)

$$u \wedge w = \begin{pmatrix} u_2 \times w_3 - u_3 \times w_2 \\ u_3 \times w_1 - u_1 \times w_3 \\ u_1 \times w_2 - u_2 \times w_1 \end{pmatrix} \quad \text{(un \textbf{vecteur})}.$$

Moyen mnémotechnique : on écrit u et w en colonnes ; pour la k-ième coordonnée on cache la ligne k et on fait le produit en croix des deux lignes restantes (on change le signe pour la 2e coordonnée).

Exemple. $(1,2,3) \wedge (4,5,6) = (2\times 6 - 3\times 5\ ;\ 3\times 4 - 1\times 6\ ;\ 1\times 5 - 2\times 4) = (-3\,;\,6\,;\,-3)$.

- $u \wedge w$ est orthogonal à u et à w ; $(u, w, u \wedge w)$ est directe (main droite).
- $\|u \wedge w\| = \|u\| \times \|w\| \times \sin\theta$ = aire du parallélogramme construit sur u et w.
- $w \wedge u = -\,u \wedge w$; $u \wedge u = \vec{0}$; $u \wedge w = \vec{0} \iff u$ et w colinéaires.
- Bilinéarité : $(u + u') \wedge w = u \wedge w + u' \wedge w$ et $(\lambda u) \wedge w = \lambda\,(u \wedge w)$.
- **Double produit vectoriel** : $u \wedge (w \wedge t) = \langle u, t\rangle\, w - \langle u, w\rangle\, t$.
- **Identité de Lagrange** : $\|u \wedge w\|^2 + \langle u, w\rangle^2 = \|u\|^2 \times \|w\|^2$.

5. Applications linéaires et matrices

Définition. $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire si $L(u+w) = L(u) + L(w)$ et $L(\lambda u) = \lambda\, L(u)$. Alors $L(\vec{0}) = \vec{0}$.
En coordonnées : chaque coordonnée de $L(x,y,z)$ est de la forme $\alpha \times x + \beta \times y + \gamma \times z$ (pas de constante, pas de produit xy, pas de puissance, pas de sin, exp…).

Matrice de L. Sa j-ième colonne contient les coordonnées de $L(e_j)$, image du j-ième vecteur de la base canonique. Alors $L(X) = AX$ pour tout vecteur colonne X.

Exemple. $L(x,y,z) = (x + 2y - z\ ;\ 3x + 4z)$: $L(e_1) = (1\,;3)$, $L(e_2) = (2\,;0)$, $L(e_3) = (-1\,;4)$, donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Produit AX : la i-ème coordonnée est $a_{i1} \times x_1 + a_{i2} \times x_2 + \cdots + a_{in} \times x_n$ (ligne i de A « scalaire » X).
Composition : si L a pour matrice A et M pour matrice B, alors $M \circ L$ a pour matrice $B \times A$.
Transposée : $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ (lignes et colonnes échangées) ; $\langle AX, Y\rangle = \langle X, A^T Y\rangle$; A symétrique si $A^T = A$.
Trace : $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ (somme de la diagonale).
Déterminant : $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha \times \delta - \beta \times \gamma$; en dimension 3, règle de Sarrus. A inversible $\iff \det A \neq 0$.
Inverse 2×2 : $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

6. Différentielle et dérivée directionnelle

Définition. f est différentiable au point p s'il existe une application linéaire L telle que, pour h proche de $\vec{0}$,

$$f(p+h) = f(p) + L(h) + \|h\|\,\varepsilon(h) \quad \text{avec } \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to\vec{0}]{} 0.$$

On note $L = df_p$ (la différentielle de f en p).

Méthode : développer $f(p+h)$; les termes de degré 1 en h forment $df_p(h)$; vérifier que le reste est négligeable devant $\|h\|$ (par exemple de degré ≥ 2 en h).

Théorème : si les dérivées partielles existent et sont continues (f de classe C^1), f est différentiable et

$$df_p(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) \times h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \times h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(p) \times h_3 = \langle \nabla f(p), h\rangle.$$

Dérivée directionnelle : $D_h f(p) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(p + t\,h) - f(p)}{t}$. Si f est différentiable, $D_h f(p) = df_p(h)$, qui est **linéaire** en h. Donc si $h \mapsto D_h f(p)$ n'est pas linéaire, f n'est pas différentiable en p.

Application linéaire : si L est linéaire, $L(p+h) = L(p) + L(h)$, donc $dL_p = L$ en tout point p.

Exemple. $f(x,y)=x^2y$, $p=(1,2)$, $h=(3,-1)$: $\nabla f=(2xy\,;\,x^2)$, $\nabla f(p)=(4\,;1)$, $D_hf(p)=4\times3+1\times(-1)=11$.

7. Matrice jacobienne, composition, inversion locale

Pour $F=(F_1,\dots,F_m)$ fonction de $(x_1,\dots,x_n)$: $J_F(p)=\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\right)$: **ligne** i = composante F_i, **colonne** j = variable x_j. Si $m=n$, $\det J_F$ s'appelle le **jacobien**. On a $dF_p(h)=J_F(p)\,h$.

Exemple. $F(x,y)=(x^2y\,;\,x+3y)$: $J_F=\begin{pmatrix}2xy & x^2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $J_F(1,2)=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, jacobien $4\times3-1\times1=11$.

Règle de la chaîne : $J_{F\circ G}(p)=J_F\big(G(p)\big)\times J_G(p)$ (attention à l'ordre et au point où l'on évalue J_F). Pour une fonction scalaire f : $\nabla(f\circ\Phi)(p)=J_\Phi(p)^T\times\nabla f(\Phi(p))$.

Théorème d'inversion locale : si $\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et $\det J_\Phi(p)\neq0$, alors Φ est une bijection d'un voisinage de p sur un voisinage de $\Phi(p)$, d'inverse C^1.

8. Gradient d'une fonction scalaire

$\nabla f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\,;\,\dfrac{\partial f}{\partial y}\,;\,\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ (un **vecteur** en chaque point).

- Pour u unitaire : $D_uf(p)=\langle\nabla f(p),u\rangle$; elle est maximale quand u a la direction de $\nabla f(p)$, et vaut alors $\|\nabla f(p)\|$.
- $\nabla f(p)$ est orthogonal à la ligne (ou surface) de niveau de f passant par p.
- Règles : $\nabla(f+\lambda g)=\nabla f+\lambda\nabla g$, $\nabla(f\times g)=f\,\nabla g+g\,\nabla f$, $\nabla(f^n)=n\,f^{n-1}\,\nabla f$, $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\,\nabla f-f\,\nabla g}{g^2}$, $\nabla(\psi\circ f)=\psi'(f)\,\nabla f$ (ψ fonction d'une variable).
- Deux gradients faciles, en coordonnées : $\nabla\langle a,v\rangle=\nabla(a_1x+a_2y+a_3z)=(a_1\,;a_2\,;a_3)=a$ et $\nabla(\|v\|^2)=\nabla(x^2+y^2+z^2)=(2x\,;2y\,;2z)=2v$.

Exemple. $f=x^2y+3y$: $\nabla f=(2xy\,;\,x^2+3)$ et $\nabla f(1,2)=(4\,;\,4)$.

9. Points critiques d'une fonction de deux variables

p est un **point critique** si $\nabla f(p)=\vec0$. On calcule en p (notations de Monge)

$$r=\frac{\partial^2f}{\partial x^2}(p),\qquad s=\frac{\partial^2f}{\partial x\,\partial y}(p),\qquad t=\frac{\partial^2f}{\partial y^2}(p).$$

- $rt-s^2>0$ et $r>0$: minimum local ; $rt-s^2>0$ et $r<0$: maximum local ;
- $rt-s^2<0$: point selle (ni minimum ni maximum) ;
- $rt-s^2=0$: on ne peut pas conclure ; on étudie directement le signe de $f(p+h)-f(p)$.

Exemple. $f=x^3-3x+y^2-2y$: $\nabla f=(3x^2-3\,;\,2y-2)=\vec0\iff(x,y)=(1,1)$ ou $(-1,1)$; $r=6x$, $s=0$, $t=2$. En $(1,1)$: $rt-s^2=12>0$, $r>0$: minimum. En $(-1,1)$: $rt-s^2=-12<0$: point selle.

10. L'opérateur nabla

$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}\,;\,\frac{\partial}{\partial y}\,;\,\frac{\partial}{\partial z}\right)$ est un « vecteur » de dérivations, que l'on manipule comme un vecteur :

écriture	calcul « comme »	nom	résultat
∇f	vecteur multiplié par un nombre	gradient de f	un vecteur
$\nabla\cdot F$	produit scalaire	divergence de F	un nombre
$\nabla\wedge F$	produit vectoriel	rotationnel de F	un vecteur
$\nabla\cdot(\nabla f)$	produit scalaire	laplacien Δf	un nombre

« Multiplier » $\frac{\partial}{\partial x}$ par une fonction signifie : dériver cette fonction par rapport à x.

11. Divergence d'un champ $F = (P, Q, R)$

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{tr} J_F \qquad \text{(un \textbf{nombre} en chaque point).}$$

Exemple. $F = (x^2 y\,;\, yz\,;\, xz^2)$: $\operatorname{div} F = 2xy + z + 2xz$.

- Interprétation : $\operatorname{div} F(p) > 0$: source ; $\operatorname{div} F(p) < 0$: puits (flux sortant d'une petite sphère autour de $p \approx \operatorname{div} F(p) \times$ volume).
- **Champ identité** $V(x, y, z) = (x\,;y\,;z)$, c'est-à-dire $V(v) = v$:
  $\operatorname{div} V = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$.
- Produit par une fonction scalaire φ : $\operatorname{div}(\varphi F) = \varphi \operatorname{div} F + \langle \nabla\varphi, F \rangle$.

  Exemple. $\varphi = xy$ et $F = V$: $\operatorname{div}(xy\,V) = xy \times 3 + \langle (y, x, 0), (x, y, z) \rangle = 3xy + 2xy = 5xy$.
- $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$ (si F est de classe C^2).

12. Rotationnel d'un champ $F = (P, Q, R)$

$$\operatorname{rot} F = \nabla \wedge F = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{(un \textbf{vecteur})} ; \qquad \text{dans le plan, } F = (P, Q) : \operatorname{rot} F = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

- Avec la jacobienne $J = J_F$: $\operatorname{rot} F = (J_{32} - J_{23}\ ;\ J_{13} - J_{31}\ ;\ J_{21} - J_{12})$. Si J_F est symétrique, $\operatorname{rot} F = \vec{0}$.
- Interprétation : une petite roue à aubes placée en p tourne avec la vitesse angulaire $\frac{1}{2} \operatorname{rot} F(p)$.
- Champ identité : $\operatorname{rot} V = \vec{0}$; $\operatorname{rot}(\nabla\varphi) = \vec{0}$ (théorème de Schwarz).
- Produit par une fonction scalaire : $\operatorname{rot}(\varphi F) = \varphi \operatorname{rot} F + \nabla\varphi \wedge F$.

Exemple. $F = (yz^2\,;\, x^2 z\,;\, xy)$: $\operatorname{rot} F = \big(x - x^2\ ;\ 2yz - y\ ;\ 2xz - z^2\big)$.

13. Laplacien, dérivée dans une direction, méthodes rapides

- Laplacien d'une fonction scalaire : $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

  Exemple. $f = x^2 y + z^3$: $\Delta f = 2y + 0 + 6z$.
- Laplacien d'un champ : $\Delta F = (\Delta P\,;\, \Delta Q\,;\, \Delta R)$ (composante par composante).
- Dérivée du champ F dans la direction du champ $G = (G_1, G_2, G_3)$:
  $(G \cdot \nabla)F = G_1 \dfrac{\partial F}{\partial x} + G_2 \dfrac{\partial F}{\partial y} + G_3 \dfrac{\partial F}{\partial z} = J_F\, G$.

Méthodes rapides

- Une formule écrite avec $v \in \mathbb{R}^3$ (par exemple avec $\|v\|$ ou $\langle a, v \rangle$) se démontre en passant en coordonnées $v = (x, y, z)$ et en dérivant composante par composante.
- Pour une fonction de $\|v\|$, poser $r = \|v\|$ et utiliser $\frac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$ (dérivée de $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).
- Toujours contrôler un résultat sur un exemple numérique simple, et un vecteur qui doit être orthogonal à un autre par un produit scalaire nul.