Trouver un intervalle de fluctuation correspondant à un seuil	**Mathématiques Complémentaires**
	Probabilités — Lois discrètes
	Intervalle de fluctuation
	Compétences : Chercher, Raisonner, Modéliser

Nom : ..... Classe : Terminale ..... Date : .....

Objectif

Construire un intervalle I, centré sur l'espérance, tel que $P(X \in I) \geqslant 1-\alpha$, où X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n\,;\frac{1}{2}\right)$, puis l'utiliser pour **prendre une décision** : un résultat observé est-il « normal » ou « anormal » ?

Partie A — Deux situations, une même question

Problème 1 — Aamjiwnaag

*Dans le village d'Aamjiwnaag (Canada), situé à proximité d'industries chimiques, sur **132 naissances** entre 1999 et 2003, il est né **86 filles**.*
*Ce nombre élevé de filles est-il une **anomalie**, ou peut-il être dû à la **fluctuation d'échantillonnage** ?*

Problème 2 — Pile ou Face

*Hugo et Laurine jouent à Pile ou Face. Sur **132 parties**, ils ont obtenu **86 fois Pile**.*
*Peut-on affirmer que la pièce est **truquée** ?*

1. Pour le problème 1, on appelle **succès** la naissance d'une **fille**. Complétez le tableau, puis répondez : les problèmes 1 et 2 sont-ils équivalents ?

	Problème 1	**Problème 2**
Une « épreuve »	.....	.....
Le « succès »	.....	.....
Nombre d'épreuves n	.....	.....
Nombre de succès observés	.....	.....
Probabilité « normale » d'un succès	.....	.....

.....

.....

.....

Dans la suite, on répond au problème 2 ; on reviendra au problème 1 à la question 7.

Partie B — Modéliser par une loi binomiale

2. On suppose que la pièce est **équilibrée**. X désigne le nombre d'apparitions de Pile sur 132 lancers.
   a) Justifiez que X suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.

   .....

   .....

   .....

   b) Calculez l'espérance $E(X)$ et interprétez-la.

   .....

   .....

   c) Calculez l'écart type $\sigma(X)$ (arrondi au centième).

. . . . . .

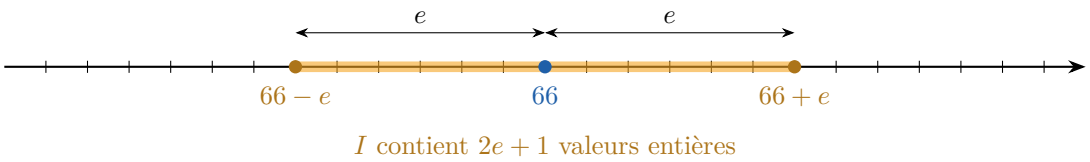
. . . . . .

Coup de pouce. Pour $X \sim \mathcal{B}(n\,;p)$: $\quad E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p), \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Partie C — La forme de l'intervalle cherché

On cherche un intervalle I **centré sur** $E(X) = 66$, donc de la forme $I = [\,66 - e\,;\,66 + e\,]$ avec e entier, tel que

$$P(X \in I) \geqslant 0{,}90 \quad \Longleftrightarrow \quad P(66 - e \leqslant X \leqslant 66 + e) \geqslant 0{,}90.$$



I contient $2e + 1$ valeurs entières

3. Écrivez plus simplement l'intervalle $I = [\,66 - e\,;\,66 + e\,]$ lorsque $e = 6$. Combien d'entiers contient-il ?

. . . . . .

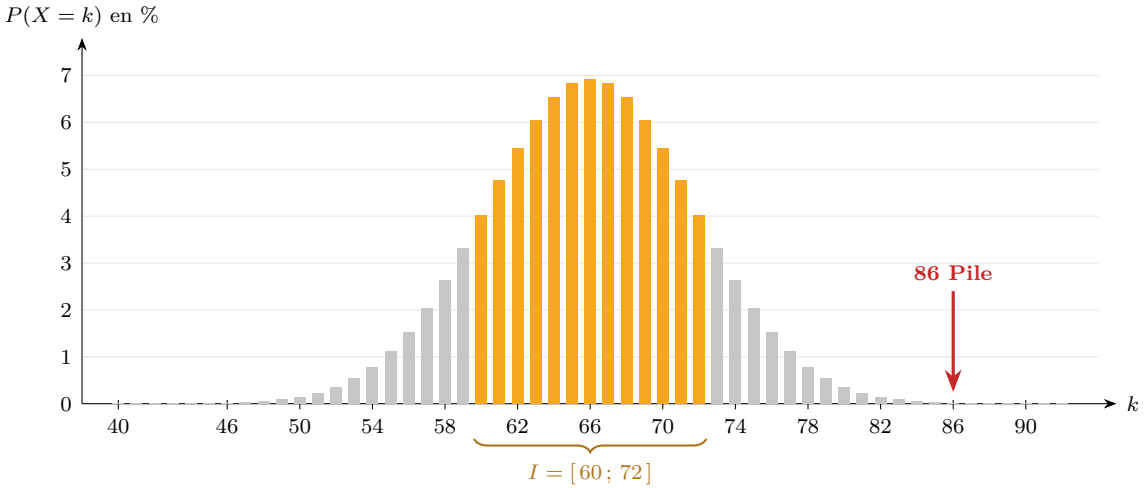
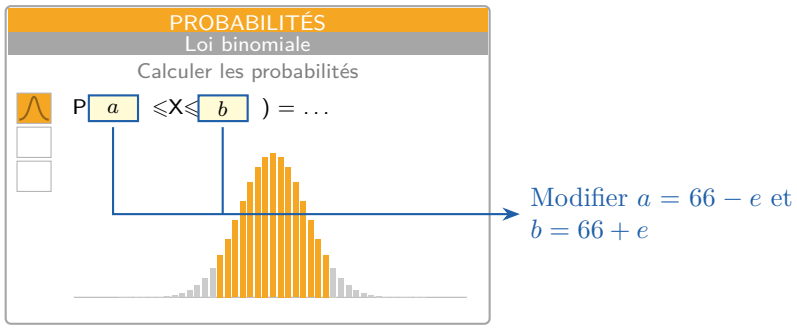


Diagramme en bâtons de la loi $\mathcal{B}(132\,;0{,}5)$: en orange, les valeurs de X appartenant à $I = [60\,;72]$.

Partie D — Chercher à la calculatrice

4. Sur la **NumWorks** : Probabilités → Binomiale, entrez $n = 132$ et $p = 0{,}5$, puis sélectionnez l'icône « intervalle » (aire entre deux bornes).



a) Complétez le tableau (probabilités arrondies au millième).

e	6	7	8	9	10	11	12
$I = [66 - e\,;66 + e]$	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$P(X \in I)$	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$\geqslant 0{,}90$?	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

b) Quelle est la plus petite valeur de e telle que $P(X \in [66 - e\,;66 + e]) \geqslant 0{,}90$?

.....

c) Complétez : « Dans plus de ..... % des échantillons de 132 lancers, le nombre de Pile est compris entre ..... et ..... »

Vocabulaire

L'intervalle $I = [57\,;75]$ est appelé **intervalle de fluctuation** de X **au seuil de 90 %** : si la pièce est équilibrée, le nombre de Pile d'un échantillon de 132 lancers tombe dans I dans au moins 90 % des cas.

Partie E — Décider

5. Le nombre d'apparitions de Pile du problème 2 appartient-il à cet intervalle de fluctuation ?

.....

Règle de décision

On fait l'hypothèse « $p = 0{,}5$ » et on calcule l'intervalle de fluctuation I au seuil $1 - \alpha$.

— Si la valeur observée **n'appartient pas** à I : on **rejette** l'hypothèse, avec un risque d'erreur d'environ α.

— Si elle **appartient** à I : on **ne rejette pas** l'hypothèse (ce qui ne prouve pas qu'elle est vraie !).

Ici, **au seuil de 90 %, on rejette l'hypothèse que la pièce est équilibrée.**

6. Déterminez l'intervalle de fluctuation au seuil de 99 %. Au seuil de 99 %, peut-on rejeter l'hypothèse que la pièce est équilibrée ?

Coup de pouce. On cherche le plus petit e tel que $P(66 - e \leqslant X \leqslant 66 + e) \geqslant 0{,}99$. Commencez par tester $e = 14$, $e = 15$, $e = 16$.

.....

.....

.....

7. Proposez une réponse argumentée au problème 1.

.....

.....

.....

.....

.....

8. On lance 100 fois une pièce équilibrée. Déterminez l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de Pile.

.....

.....

.....

Pour aller plus loin

9. En seconde, on a vu que, pour une proportion p et un échantillon de taille n, la fréquence observée appartient dans environ 95 % des cas à $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Calculez cet intervalle pour $p = 0{,}5$ et $n = 100$, puis traduisez-le en nombre de Pile. Comparez avec la question 8.

.....

.....

.....

Bilan — Méthode

Pour $X \sim \mathcal{B}(n\,;p)$ et un seuil $1-\alpha$:

1. calculer $E(X) = np$ (le « centre ») ;
2. tester $e = 1{,}2{,}3{,}\ldots$ et calculer $P\big(E(X) - e \leqslant X \leqslant E(X) + e\big)$;
3. retenir la **plus petite** valeur de e pour laquelle cette probabilité est $\geqslant 1-\alpha$;
4. comparer la valeur observée à l'intervalle obtenu pour décider.