Fonction sinus et limites

Terminale (spécialité) • Limites et dérivation

Rappels **Nombre dérivé.** Si f est dérivable en x_0 : $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.
Théorème des gendarmes. Si $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} g = \lim\limits_{x\to a} h = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} f = \ell$.
Suite et fonction. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

Partie A – Le résultat fondamental et ses conséquences

1 Calculer, si elle existe : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.
Indice : remarquer que $\sin 0 = 0$ et faire apparaître un taux d'accroissement.

2 Calculer, si elle existe : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$.
Attention : $\sin(3x) \neq 3\sin x$.

3 Calculer, si elle existe : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}$. Interpréter graphiquement le résultat.

4 Calculer, si elle existe : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Indice : poser $X = \frac{1}{x}$.

5 Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)$ n'existe pas.
Indice : raisonner par l'absurde avec les suites $U_n = n\pi$ et $V_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$.

Partie B – Pour aller plus loin

6 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$, puis comparer avec l'exercice 1.

7 Calculer $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, puis comparer avec l'exercice 4.

8 Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$.

Partie C – Entraînement

9 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{2x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{\sin(6x)}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{3}{x}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$

Corrigés détaillés

Corrigé de l'exercice 1

Si on remplace x par 0, on obtient $\frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$: forme indéterminée.

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \qquad \textit{Pour } x \neq 0, \textit{ car } \sin 0 = 0.$$

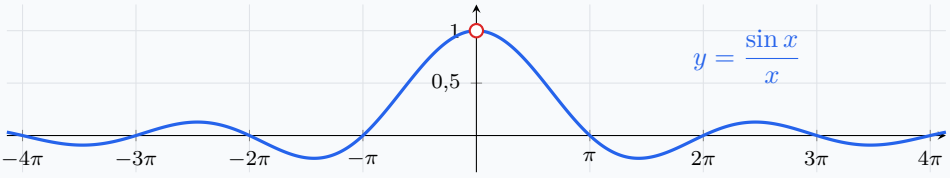
$$\frac{\sin x}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \qquad \textit{On pose } f(x) = \sin x \textit{ et } x_0 = 0.$$

$$f'(x) = \cos x \qquad \textit{Sinus est dérivable sur } \mathbb{R}.$$

$$f'(0) = \cos 0 = 1 \qquad \textit{Nombre dérivé en 0.}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1 \qquad \textit{Définition du nombre dérivé.}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ **(résultat à retenir).**



La courbe de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$: la fonction n'est pas définie en 0, mais la courbe « vise » le point $(0\,;1)$.

Corrigé de l'exercice 2

Forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On pose $X = 3x$, donc $x = \frac{X}{3}$.

$$\frac{\sin(3x)}{x} = \frac{\sin(X)}{\frac{X}{3}} \qquad \textit{On remplace } 3x \textit{ par } X \textit{ et } x \textit{ par } \frac{X}{3}.$$

$$\frac{\sin(3x)}{x} = \sin(X) \times \frac{3}{X} \qquad \textit{Diviser par } \frac{X}{3}\textit{, c'est multiplier par } \frac{3}{X}.$$

$$\frac{\sin(3x)}{x} = 3 \times \frac{\sin(X)}{X} \qquad \textit{On réordonne.}$$

$$\lim_{x\to 0} X = \lim_{x\to 0} 3x = 0 \qquad \textit{La nouvelle variable tend vers 0.}$$

$$\lim_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1 \qquad \textit{Exercice 1.}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x} = 3 \times 1 = 3.$

Autre rédaction : $\frac{\sin(3x)}{x} = 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x}$ et $\frac{\sin(3x)}{3x} \to 1$. Plus généralement, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x} = a$.

Corrigé de l'exercice 3

Forme indéterminée $\frac{0}{0}$ car $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

$$\frac{\sin(x) - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \qquad \textit{Pour } x \neq \frac{\pi}{2} \textit{ ; on remplace 1 par } \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

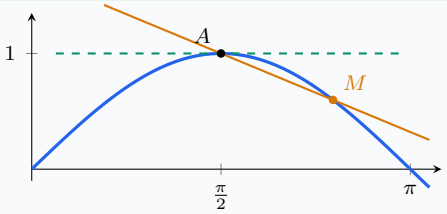
$$= \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \qquad \textit{Avec } f(x) = \sin x \textit{ et } x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \textit{Valeur remarquable.}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Interprétation : ce quotient est la pente de la sécante (AM) avec $A\left(\frac{\pi}{2}\,;1\right)$ et $M(x\,;\sin x)$. Quand M se rapproche de A, cette pente tend vers celle de la tangente en A, qui est horizontale (sommet de la courbe).



Corrigé de l'exercice 4

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin 0 = 0$: forme indéterminée « $\infty \times 0$ ».
Pour $x \neq 0$, on pose $X = \frac{1}{x}$, donc $x = \frac{1}{X}$.

$$x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{X}\sin(X) \qquad \textit{On remplace } x \textit{ par } \frac{1}{X}.$$
$$x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin(X)}{X}$$
$$\lim_{x\to+\infty} X = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \textit{La nouvelle variable tend vers } 0.$$
$$\lim_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1 \qquad \textit{Exercice 1.}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$: la droite $y = 1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

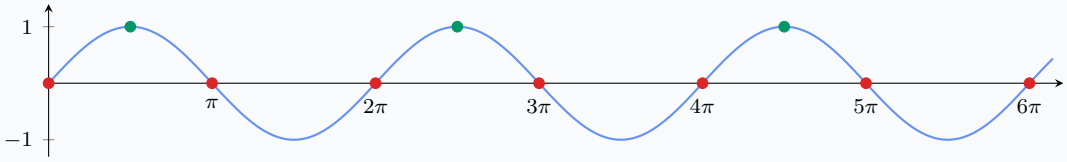
Corrigé de l'exercice 5

Raisonnons par l'absurde : supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x) = \ell$.

- Soit $U_n = n\pi$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(U_n) = \ell$ (suite et fonction).
  Or $\sin(U_n) = \sin(n\pi) = 0$ pour tout n : la suite est constante, donc $\ell = 0$.
- Soit $V_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(V_n) = \ell$.
  Or $\sin(V_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ (2π-périodicité), donc $\ell = 1$.

On ne peut pas avoir $\ell = 0$ et $\ell = 1$: l'hypothèse de départ est fausse.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x)$ n'existe pas.



En rouge les points d'abscisse U_n (ordonnée 0), en vert ceux d'abscisse V_n (ordonnée 1).

Corrigé de l'exercice 6

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \qquad \textit{Pour tout réel } x.$$
$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x} \qquad \textit{On divise par } x > 0 \textit{ : le sens ne change pas.}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$, alors que cette expression tend vers 1 en 0 : la limite dépend de l'endroit où l'on se place.

Corrigé de l'exercice 7

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant 1 &\qquad \textit{Pour } x \neq 0.\\
0 \leqslant \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x| &\qquad \textit{On multiplie par } |x| \geqslant 0.\\
-|x| \leqslant x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant |x| &\qquad |A| \leqslant B \textit{ équivaut à } -B \leqslant A \leqslant B.
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to0} -|x| = \lim\limits_{x\to0} |x| = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, alors que cette expression tend vers 1 en $+\infty$ (exercice 4).

Corrigé de l'exercice 8

Forme indéterminée $\frac{0}{0}$ car $\cos 0 = 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x - 1}{x} &= \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} && \textit{Pour } x \neq 0.\\
&= \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} && \textit{Avec } g(x) = \cos x.\\
g'(x) &= -\sin x\\
g'(0) &= -\sin 0 = 0
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = g'(0) = 0.$

Corrigé de l'exercice 9

a) Forme $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(5x)}{2x} &= \frac{5\sin(5x)}{5\times 2x} && \textit{On multiplie en haut et en bas par } 5.\\
&= \frac{5}{2}\times\frac{\sin(5x)}{5x} && \textit{Car } 5\times 2x = 2\times 5x.
\end{aligned}$$

Quand $x \to 0$, $5x \to 0$ donc $\frac{\sin(5x)}{5x} \to 1$. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(5x)}{2x} = \dfrac{5}{2}$.

b) Forme $\frac{0}{0}$. Pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(4x)}{\sin(6x)} &= \frac{\sin(4x)}{4x}\times\frac{6x}{\sin(6x)}\times\frac{4x}{6x} && \textit{On multiplie et divise par } 4x \textit{ et par } 6x.\\
&= \frac{\sin(4x)}{4x}\times\frac{6x}{\sin(6x)}\times\frac{2}{3} && \frac{4x}{6x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

$\frac{\sin(4x)}{4x} \to 1$ et $\frac{6x}{\sin(6x)} \to \frac{1}{1} = 1$. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(4x)}{\sin(6x)} = \dfrac{2}{3}$.

c) Forme « $\infty \times 0$ ».

$$x \sin\left(\frac{3}{x}\right) = 3 \times \frac{x}{3} \times \sin\left(\frac{3}{x}\right) \qquad \textit{Car } 3 \times \frac{x}{3} = x.$$

$$= 3 \times \frac{\sin\left(\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}} \qquad \textit{Multiplier par } \frac{x}{3}\textit{, c'est diviser par } \frac{3}{x}.$$

Avec $X = \frac{3}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$: $\frac{\sin X}{X} \to 1$. $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{3}{x}\right) = 3.$

d) Forme $\frac{0}{0}$ car $\sin \pi = 0$.

$$\frac{\sin x}{x - \pi} = \frac{\sin x - \sin \pi}{x - \pi} \qquad \textit{Taux d'accroissement de } \sin \textit{ en } \pi.$$

$$f'(\pi) = \cos \pi = -1 \qquad \textit{Avec } f = \sin,\ f' = \cos.$$

$\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{x - \pi} = -1.$