

Le crible de Matiyasevich

Activité de seconde — nombres premiers et droites

Un nombre est **premier** s'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. Les mathématiciens russes Youri Matiyasevich et Boris Stechkin ont imaginé un crible « visuel » qui utilise la parabole d'équation $y = x^2$. **Principe** : on choisit deux entiers $a \geq 2$ et $b \geq 2$, on place $A(a; a^2)$ à droite et $B(-b; b^2)$ à gauche sur la parabole, puis on trace la droite (AB) . On regarde où elle coupe l'axe des ordonnées.

A. Des points sur la parabole

Complète le tableau (les points sont sur la parabole $y = x^2$).

Abscisse x	Calcul de x^2	Point
2		$(2; \dots)$
5		$(5; \dots)$
-3		$(-3; \dots)$
-6		$(-6; \dots)$

B. Une première droite : $a = 3$ et $b = 4$

1. Donne les coordonnées de A et de B .

.....

2. Place A et B sur le graphique, puis trace la droite (AB) . En quel point coupe-t-elle l'axe des ordonnées ?

.....

3. Calcule le coefficient directeur m de (AB) .

.....

.....

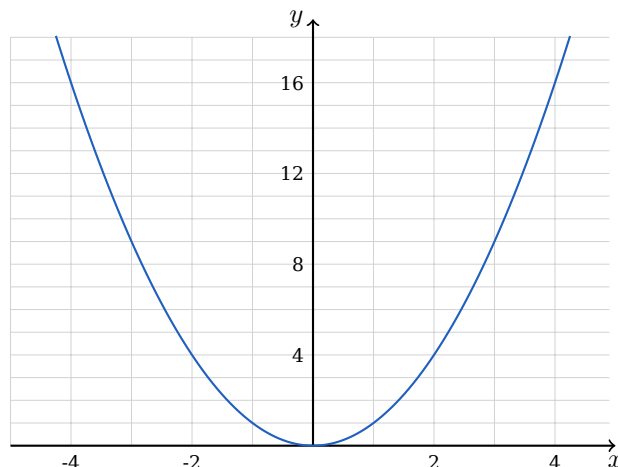
4. Cette droite a pour équation $y = mx + p$. Utilise le point A pour calculer p .

.....

.....

5. Compare p et le produit $a \times b$. Que remarques-tu ?

.....



C. Sans tracer : $a = 2$ et $b = 7$

1. Donne les coordonnées de A et de B .

.....

2. Calcule le coefficient directeur de (AB) , puis l'ordonnée à l'origine p .

.....

.....

3. Vérifie que $p = a \times b$.

.....

D. Le crible en action

Pour chaque couple $(a; b)$ avec $2 \leq a \leq b$ et $a \times b \leq 40$, la droite (AB) coupe l'axe en $a \times b$: **barre ce nombre** dans le tableau (essaie $(2; 2)$, $(2; 3)$, $(2; 4)$..., puis $(3; 3)$, $(3; 4)$...).

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40

1. Écris la liste des nombres de 2 à 40 qui ne sont pas barrés :

.....

2. Comment appelle-t-on ces nombres ? Pourquoi aucune droite ne passe-t-elle par 13 ?

.....

.....

3. Pourquoi impose-t-on $a \geq 2$ et $b \geq 2$? (Que se passerait-il avec $a = 1$ et $b = 7$?)

.....

.....

E. Pour aller plus loin : pourquoi ça marche ?

On prend maintenant $A(a; a^2)$ et $B(-b; b^2)$ avec a et b quelconques.

1. Exprime le coefficient directeur m de (AB) en fonction de a et b : $m = \frac{\dots}{\dots}$

.....

2. Avec $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$, montre que $m = a - b$.

.....

.....

3. La droite a pour équation $y = (a - b)x + p$. Utilise le point A pour exprimer p en fonction de a et b .

.....

.....

4. Conclus : en quel nombre (AB) coupe-t-elle l'axe des ordonnées ? Pourquoi un nombre premier n'est-il jamais atteint ?

.....

.....

5. **Défi** : combien de droites (AB) différentes (avec a et b entiers ≥ 2) coupent l'axe en 12 ? Donne les couples $(a; b)$.

.....

.....