Nom : ..... Classe : 1re spécialité mathématiques

Construire la fonction exponentielle avec la méthode d'Euler

Le problème

Dans le cours, la fonction exponentielle est définie ainsi :

Définition

La fonction **exponentielle**, notée exp, est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1.$$

On admet qu'une telle fonction existe. Mais il y a un souci : **on ne connaît aucune formule** pour la calculer. Comment trouver $f(1)$? À quoi ressemble sa courbe ?

1. On essaie avec des fonctions connues. Pour chacune, calculer $f'(x)$ puis dire si $f' = f$ et si $f(0) = 1$.

a) $f(x) = x + 1$.

b) $f(x) = x^2 + 1$.

Un peu d'histoire

En 1768, le mathématicien suisse **Leonhard Euler** propose une idée : quand on ne sait pas calculer une fonction, on peut quand même *dessiner sa courbe petit à petit*, en avançant à chaque fois sur une **tangente**. C'est la *méthode d'Euler*.

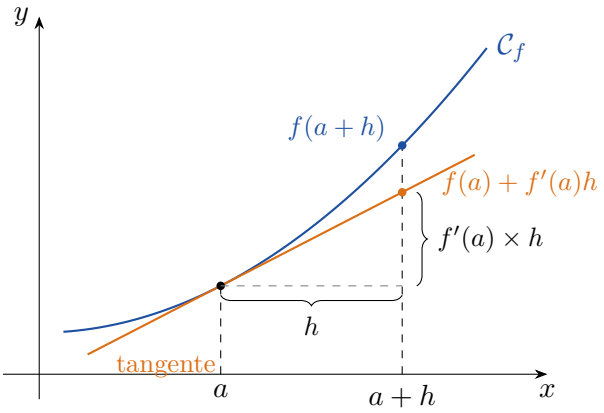
Partie A – Rappel : la tangente remplace la courbe

Si une fonction f est dérivable en a, la tangente à sa courbe au point d'abscisse a a pour pente $f'(a)$. Près de ce point, la courbe et la tangente sont presque confondues. Donc, pour un petit nombre h :

Approximation affine

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \times h$$

On part de la hauteur $f(a)$, et on monte de « pente × déplacement ».



2. Un exemple pour se convaincre. On prend $g(x) = x^2$ et $a = 3$.

a) Calculer $g'(x)$, puis $g(3)$ et $g'(3)$.

b) Avec $h = 0{,}1$: calculer l'approximation $g(3) + g'(3) \times 0{,}1$, puis la valeur exacte $g(3{,}1)$.

c) Même travail avec $h = 0{,}01$.

d) Que remarque-t-on quand h devient plus petit ?

Partie B – L'idée clé : avancer d'un pas

Dans toute la suite, f désigne la fonction exponentielle : $f' = f$ et $f(0) = 1$.

3. Dans la formule $f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \times h$, remplacer $f'(a)$ par ce qu'il vaut pour notre fonction f.

4. Factoriser $f(a) + f(a) \times h$ par $f(a)$.

5. Que vaut la pente de la tangente au point de la courbe d'abscisse a ? Comparer avec la hauteur $f(a)$ de ce point.

Le pas d'Euler

Pour la fonction exponentielle et un petit nombre $h > 0$:

$$f(a+h) \approx f(a) \times (1+h).$$

Pour avancer d'un pas h vers la droite, on multiplie la valeur par $(1+h)$.

Partie C – Construction à la main avec un pas $h = 0{,}5$

On part du seul point connu : $f(0) = 1$, c'est-à-dire le point $M_0(0\,;1)$. À chaque pas, on avance de 0,5 en abscisse et on multiplie l'ordonnée par $1 + 0{,}5 = 1{,}5$.

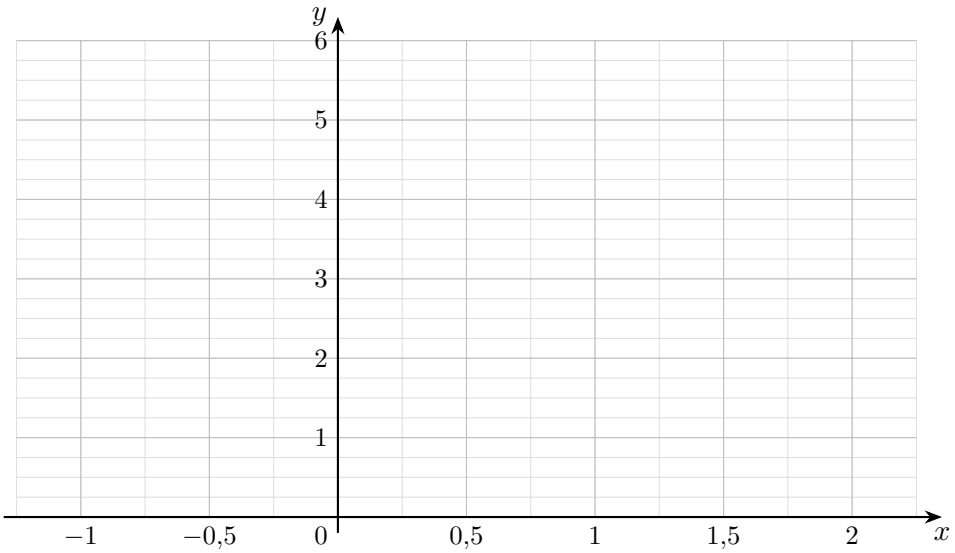
6. Compléter le tableau (on peut détailler les calculs en dessous).

Point	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
x	0	0,5			
y	1				

7. Vérification avec la tangente. Au point $M_1(0{,}5\,;1{,}5)$, quelle est la pente de la tangente ? En partant de M_1 et en avançant de 0,5 sur cette tangente, de combien monte-t-on ? Retrouver y_2.

8. Vers la gauche. En reculant d'un pas : $f(a-h) \approx f(a) - f'(a) \times h$. Montrer que $f(a-h) \approx f(a) \times (1-h)$, puis calculer les ordonnées des points M_{-1} et M_{-2} d'abscisses $-0{,}5$ et -1.

9. Placer les points M_{-2}, M_{-1}, M_0, …, M_4 dans le repère ci-dessous et les relier par des segments : on obtient une première image de la courbe de exp.



10. Quelle valeur approchée de $f(1)$ obtient-on avec ce pas ?

Partie D – Des pas plus petits

D'après la partie A, plus le pas est petit, plus l'approximation est bonne. Mais il faut faire plus de pas !
Astuce calculatrice : taper `1` *puis* `EXE`*, puis* `Ans×1.25` *et appuyer plusieurs fois sur* `EXE`*.*

11. Pas $h = 0{,}25$. Par quel nombre multiplie-t-on à chaque pas ? Combien de pas faut-il pour aller de $x = 0$ à $x = 1$? Compléter (valeurs arrondies à 10^{-4}).

x	0	0,25	0,5	0,75	1
y	1				

12. Pas $h = 0{,}1$. Compléter (valeurs arrondies à 10^{-4}).

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	1										

13. Lien avec les suites. On note y_n l'ordonnée obtenue après n pas de longueur h.

a) Exprimer y_{n+1} en fonction de y_n. Quelle est la nature de la suite (y_n) ?

b) En déduire y_n en fonction de n, puis retrouver directement la valeur obtenue pour $x = 1$ avec $h = 0{,}1$.

14. De plus en plus précis. Compléter le tableau des valeurs approchées de $f(1)$ à l'aide de la calculatrice.

Pas h	0,5	0,25	0,1	0,01	0,001
Nombre de pas n	2				
Calcul	$1{,}5^2$				
$f(1) \approx$	2,25				

15. Que semblent faire ces valeurs quand le pas devient très petit ?

Le nombre e

Quand le pas h devient de plus en plus petit, les valeurs approchées de $f(1)$ se rapprochent d'un nombre noté e (comme Euler) :

$$\exp(1) = \mathrm{e} \approx 2{,}71828.$$

Avec $h = \dfrac{1}{n}$, il faut n pas pour atteindre $x = 1$, donc $\mathrm{e} \approx \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ pour n grand.

Partie E – Laisser l'ordinateur faire les pas

Faire 1 000 pas à la main, c'est long ! On écrit la méthode sous forme d'algorithme. Il n'y a que deux variables : x (où on est) et y (la hauteur).

En langage naturel

$x \leftarrow 0$
$y \leftarrow 1$
Répéter n fois :
  $y \leftarrow y \times (1 + h)$
  $x \leftarrow x + h$
Renvoyer y

En Python

```
def euler(h, n):
    x = 0
    y = 1
    for k in range(n):
        y = ....................
        x = x + h
    return y
```

16. Compléter la ligne 5 du programme Python.

17. On appelle `euler(0.5, 4)`. Compléter le tableau qui montre le contenu des variables après chaque passage dans la boucle.

Après le passage n°	départ	1	2	3	4
x	0				
y	1				

18. Quel appel faut-il écrire pour obtenir une valeur approchée de $f(1)$ avec un pas de 0,01 ? Justifier le nombre de pas.

19. *Pour aller plus loin.* Quel appel donne une valeur approchée de $f(2)$ avec un pas de 0,01 ?

Partie F – Ce que la construction nous apprend

20. Signe. On part de $y_0 = 1$ et on multiplie à chaque pas par $1 + h$ (avec $0 < h < 1$), ou par $1 - h$ vers la gauche. Les valeurs obtenues peuvent-elles être négatives ou nulles ?

21. Sens de variation. Quand on multiplie un nombre strictement positif par $1 + h > 1$, que se passe-t-il ? Qu'en déduire pour la courbe ?

22. Une propriété surprenante. Avec $h = 0{,}1$: $f(1) \approx 1{,}1^{10}$ et $f(2) \approx 1{,}1^{20}$.

a) Calculer $1{,}1^{20}$ et $\left(1{,}1^{10}\right)^2$. Que constate-t-on ?

b) Quelle relation peut-on conjecturer entre $f(2)$ et $f(1)$?

Bilan

— La méthode d'Euler construit la courbe de exp en suivant des petits morceaux de tangentes : à chaque pas h, on **multiplie par** $(1 + h)$.

— Les ordonnées obtenues forment une **suite géométrique** de raison $1 + h$: $y_n = (1 + h)^n$.

— Plus le pas est petit, plus la courbe obtenue est proche de la vraie courbe ; on trouve $\exp(1) = \mathrm{e} \approx 2{,}718$.

— La construction laisse deviner les propriétés du cours : $\exp(x) > 0$, exp est croissante, et $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.