Nom : ..... Classe : 1re spécialité mathématiques

Construire la fonction exponentielle avec la méthode d'Euler

Corrigé

Le problème

Dans le cours, la fonction exponentielle est définie ainsi :

Définition

La fonction **exponentielle**, notée exp, est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1.$$

On admet qu'une telle fonction existe. Mais il y a un souci : **on ne connaît aucune formule** pour la calculer. Comment trouver $f(1)$? À quoi ressemble sa courbe ?

1. On essaie avec des fonctions connues. Pour chacune, calculer $f'(x)$ puis dire si $f' = f$ et si $f(0) = 1$.

a) $f(x) = x + 1$.

$f'(x) = 1$.
$f(0) = 0 + 1 = 1$: la deuxième condition est vérifiée.
Mais $f'(x) = 1$ et $f(x) = x + 1$: ce n'est pas la même chose (par exemple $f'(2) = 1$ alors que $f(2) = 3$).
Donc $f' \neq f$: cette fonction **ne convient pas**.

b) $f(x) = x^2 + 1$.

$f'(x) = 2x$.
$f(0) = 0^2 + 1 = 1$: la deuxième condition est vérifiée.
Mais $f'(0) = 2 \times 0 = 0$ alors que $f(0) = 1$: donc $f' \neq f$.
Cette fonction **ne convient pas** non plus.

Un peu d'histoire

En 1768, le mathématicien suisse **Leonhard Euler** propose une idée : quand on ne sait pas calculer une fonction, on peut quand même *dessiner sa courbe petit à petit*, en avançant à chaque fois sur une **tangente**. C'est la *méthode d'Euler*.

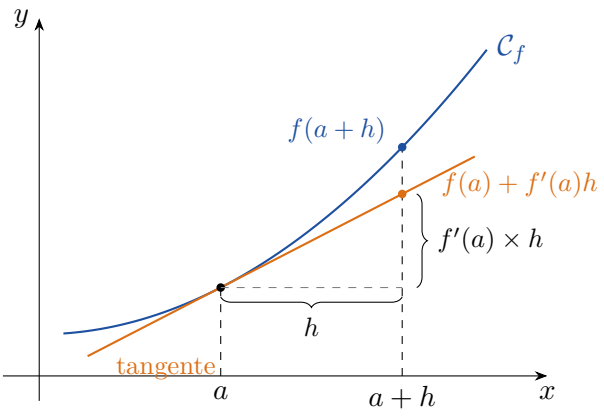
Partie A – Rappel : la tangente remplace la courbe

Si une fonction f est dérivable en a, la tangente à sa courbe au point d'abscisse a a pour pente $f'(a)$. Près de ce point, la courbe et la tangente sont presque confondues. Donc, pour un petit nombre h :

Approximation affine

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a) \times h$$

On part de la hauteur $f(a)$, et on monte de « pente × déplacement ».



2. Un exemple pour se convaincre. On prend $g(x) = x^2$ et $a = 3$.

a) Calculer $g'(x)$, puis $g(3)$ et $g'(3)$.

$g'(x) = 2x$.
$g(3) = 3^2 = 9$.
$g'(3) = 2 \times 3 = 6$.

b) Avec $h = 0{,}1$: calculer l'approximation $g(3) + g'(3) \times 0{,}1$, puis la valeur exacte $g(3{,}1)$.

Approximation : $g(3) + g'(3) \times 0{,}1 = 9 + 6 \times 0{,}1 = 9 + 0{,}6 = 9{,}6$.
Valeur exacte : $g(3{,}1) = 3{,}1^2 = 9{,}61$.
Écart : $9{,}61 - 9{,}6 = 0{,}01$.

c) Même travail avec $h = 0{,}01$.

Approximation : $g(3) + g'(3) \times 0{,}01 = 9 + 6 \times 0{,}01 = 9 + 0{,}06 = 9{,}06$.
Valeur exacte : $g(3{,}01) = 3{,}01^2 = 9{,}0601$.
Écart : $9{,}0601 - 9{,}06 = 0{,}0001$.

d) Que remarque-t-on quand h devient plus petit ?

L'écart devient beaucoup plus petit : **plus h est petit, meilleure est l'approximation**.

Partie B – L'idée clé : avancer d'un pas

Dans toute la suite, f désigne la fonction exponentielle : $f' = f$ et $f(0) = 1$.

3. Dans la formule $f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \times h$, remplacer $f'(a)$ par ce qu'il vaut pour notre fonction f.

Comme $f' = f$, on a $f'(a) = f(a)$. Donc :

$$f(a+h) \approx f(a) + f(a) \times h.$$

4. Factoriser $f(a) + f(a) \times h$ par $f(a)$.

$f(a) + f(a) \times h = f(a) \times 1 + f(a) \times h = f(a) \times (1+h)$.
Donc $f(a+h) \approx f(a) \times (1+h)$.

5. Que vaut la pente de la tangente au point de la courbe d'abscisse a ? Comparer avec la hauteur $f(a)$ de ce point.

La pente est $f'(a)$, et $f'(a) = f(a)$: **la pente de la tangente est égale à la hauteur du point**.

Le pas d'Euler

Pour la fonction exponentielle et un petit nombre $h > 0$:

$$f(a+h) \approx f(a) \times (1+h).$$

Pour avancer d'un pas h vers la droite, on multiplie la valeur par $(1+h)$.

Partie C – Construction à la main avec un pas $h = 0{,}5$

On part du seul point connu : $f(0) = 1$, c'est-à-dire le point $M_0(0\,;1)$. À chaque pas, on avance de 0,5 en abscisse et on multiplie l'ordonnée par $1 + 0{,}5 = 1{,}5$.

6. Compléter le tableau (on peut détailler les calculs en dessous).

Point	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
x	0	0,5	1	1,5	2
y	1	1,5	2,25	3,375	5,0625

$y_1 = y_0 \times 1{,}5 = 1 \times 1{,}5 = 1{,}5$
$y_2 = y_1 \times 1{,}5 = 1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$
$y_3 = y_2 \times 1{,}5 = 2{,}25 \times 1{,}5 = 3{,}375$
$y_4 = y_3 \times 1{,}5 = 3{,}375 \times 1{,}5 = 5{,}0625$

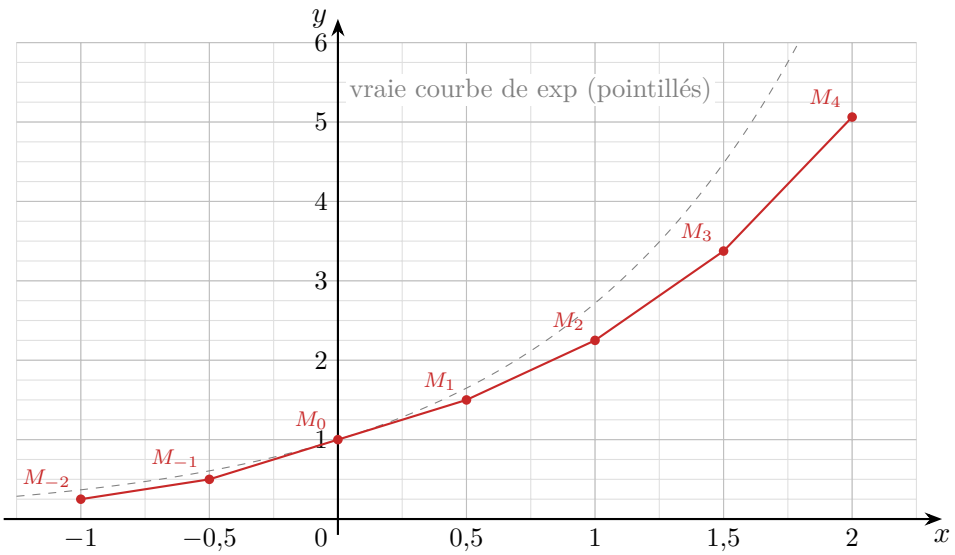
7. Vérification avec la tangente. Au point $M_1(0{,}5\,;1{,}5)$, quelle est la pente de la tangente ? En partant de M_1 et en avançant de 0,5 sur cette tangente, de combien monte-t-on ? Retrouver y_2.

La pente est égale à la hauteur : pente $= 1{,}5$.
On monte de pente $\times$ déplacement $= 1{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}75$.
On arrive à la hauteur $1{,}5 + 0{,}75 = 2{,}25$: c'est bien y_2.

8. Vers la gauche. En reculant d'un pas : $f(a-h) \approx f(a) - f'(a) \times h$. Montrer que $f(a-h) \approx f(a) \times (1-h)$, puis calculer les ordonnées des points M_{-1} et M_{-2} d'abscisses $-0{,}5$ et -1.

$f(a-h) \approx f(a) - f'(a) \times h = f(a) - f(a) \times h = f(a) \times (1-h)$.
Avec $h = 0{,}5$: on multiplie par $1 - 0{,}5 = 0{,}5$ à chaque pas vers la gauche.
$y_{-1} = 1 \times 0{,}5 = 0{,}5$ $\qquad$ $y_{-2} = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$.

9. Placer les points M_{-2}, M_{-1}, M_0, …, M_4 dans le repère ci-dessous et les relier par des segments : on obtient une première image de la courbe de exp.



10. Quelle valeur approchée de $f(1)$ obtient-on avec ce pas ?

> M_2 a pour abscisse 1, donc $f(1) \approx y_2 = 2{,}25$.

Partie D – Des pas plus petits

D'après la partie A, plus le pas est petit, plus l'approximation est bonne. Mais il faut faire plus de pas !
Astuce calculatrice : taper `1` *puis* `EXE`*, puis* `Ans×1.25` *et appuyer plusieurs fois sur* `EXE`*.*

11. Pas $h = 0{,}25$. Par quel nombre multiplie-t-on à chaque pas ? Combien de pas faut-il pour aller de $x = 0$ à $x = 1$? Compléter (valeurs arrondies à 10^{-4}).

> On multiplie par $1 + 0{,}25 = 1{,}25$. Il faut $1 \div 0{,}25 = 4$ pas.

x	0	0,25	0,5	0,75	1
y	1	1,25	1,5625	1,9531	2,4414

12. Pas $h = 0{,}1$. Compléter (valeurs arrondies à 10^{-4}).

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	1	1,1	1,21	1,331	1,4641	1,6105	1,7716	1,9487	2,1436	2,3579	2,5937

13. Lien avec les suites. On note y_n l'ordonnée obtenue après n pas de longueur h.

a) Exprimer y_{n+1} en fonction de y_n. Quelle est la nature de la suite (y_n) ?

> À chaque pas on multiplie par $(1 + h)$: $y_{n+1} = y_n \times (1 + h)$.
> On multiplie toujours par le même nombre : (y_n) est une **suite géométrique** de premier terme $y_0 = 1$ et de raison $q = 1 + h$.

b) En déduire y_n en fonction de n, puis retrouver directement la valeur obtenue pour $x = 1$ avec $h = 0{,}1$.

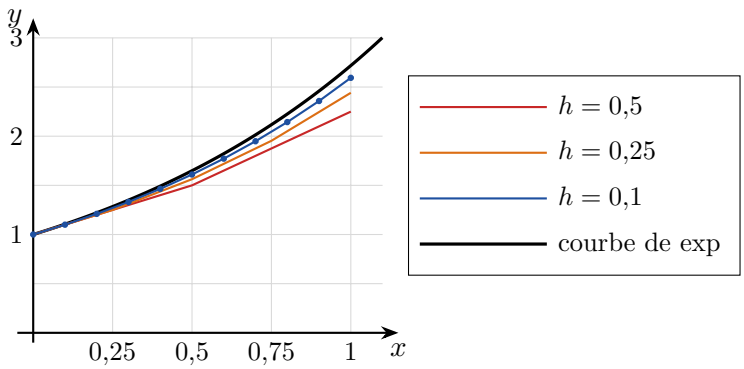
> $y_n = y_0 \times q^n = 1 \times (1 + h)^n = (1 + h)^n$.
> Avec $h = 0{,}1$, il faut 10 pas pour arriver à $x = 1$: $y_{10} = 1{,}1^{10} \approx 2{,}5937$.

14. De plus en plus précis. Compléter le tableau des valeurs approchées de $f(1)$ à l'aide de la calculatrice.

Pas h	0,5	0,25	0,1	0,01	0,001
Nombre de pas n	2	4	10	100	1 000
Calcul	$1{,}5^2$	$1{,}25^4$	$1{,}1^{10}$	$1{,}01^{100}$	$1{,}001^{1000}$
$f(1) \approx$	2,25	2,4414	2,5937	2,7048	2,7169

15. Que semblent faire ces valeurs quand le pas devient très petit ?

> Elles augmentent, mais de moins en moins : elles semblent **se rapprocher d'un nombre proche de** 2,718.



Le nombre e

Quand le pas h devient de plus en plus petit, les valeurs approchées de $f(1)$ se rapprochent d'un nombre noté e (comme Euler) :

$$\exp(1) = \mathrm{e} \approx 2{,}71828.$$

Avec $h = \dfrac{1}{n}$, il faut n pas pour atteindre $x = 1$, donc $\mathrm{e} \approx \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ pour n grand.

Partie E – Laisser l'ordinateur faire les pas

Faire 1 000 pas à la main, c'est long ! On écrit la méthode sous forme d'algorithme. Il n'y a que deux variables : x (où on est) et y (la hauteur).

En langage naturel

$x \leftarrow 0$
$y \leftarrow 1$
Répéter n fois :
  $y \leftarrow y \times (1 + h)$
  $x \leftarrow x + h$
Renvoyer y

En Python

```
1  def euler(h, n):
2      x = 0
3      y = 1
4      for k in range(n):
5          y = y * (1 + h)
6          x = x + h
7      return y
```

16. Compléter la ligne 5 du programme Python.

`y = y * (1 + h)` : on multiplie la hauteur par $(1 + h)$ à chaque pas.

17. On appelle `euler(0.5, 4)`. Compléter le tableau qui montre le contenu des variables après chaque passage dans la boucle.

Après le passage n°	départ	1	2	3	4
x	0	0,5	1	1,5	2
y	1	1,5	2,25	3,375	5,0625

On retrouve exactement le tableau de la partie C : la fonction renvoie $5{,}0625 \approx f(2)$.

18. Quel appel faut-il écrire pour obtenir une valeur approchée de $f(1)$ avec un pas de 0,01 ? Justifier le nombre de pas.

Pour aller de 0 à 1 avec des pas de 0,01, il faut $1 \div 0{,}01 = 100$ pas.
On écrit `euler(0.01, 100)`, qui renvoie environ 2,7048.

19. *Pour aller plus loin.* Quel appel donne une valeur approchée de $f(2)$ avec un pas de 0,01 ?

Il faut $2 \div 0{,}01 = 200$ pas : `euler(0.01, 200)` renvoie environ 7,316 (la vraie valeur est $e^2 \approx 7{,}389$).

Partie F – Ce que la construction nous apprend

20. Signe. On part de $y_0 = 1$ et on multiplie à chaque pas par $1 + h$ (avec $0 < h < 1$), ou par $1 - h$ vers la gauche. Les valeurs obtenues peuvent-elles être négatives ou nulles ?

$1 > 0$, $1 + h > 0$ et $1 - h > 0$. Un produit de nombres strictement positifs est strictement positif. Donc toutes les valeurs sont **strictement positives** : la courbe reste au-dessus de l'axe des abscisses.

21. Sens de variation. Quand on multiplie un nombre strictement positif par $1 + h > 1$, que se passe-t-il ? Qu'en déduire pour la courbe ?

Le nombre augmente. Donc à chaque pas vers la droite, la hauteur augmente : la fonction semble **croissante**.
(On le retrouve avec le cours : $f' = f$ et $f > 0$, donc $f' > 0$.)

22. Une propriété surprenante. Avec $h = 0{,}1$: $f(1) \approx 1{,}1^{10}$ et $f(2) \approx 1{,}1^{20}$.

a) Calculer $1{,}1^{20}$ et $\left(1{,}1^{10}\right)^2$. Que constate-t-on ?

$1{,}1^{20} \approx 6{,}7275$.
$\left(1{,}1^{10}\right)^2 = 1{,}1^{10\times 2} = 1{,}1^{20} \approx 6{,}7275$: c'est le même nombre.

b) Quelle relation peut-on conjecturer entre $f(2)$ et $f(1)$?

$f(2) \approx f(1) \times f(1)$, c'est-à-dire $f(1 + 1) = f(1) \times f(1)$.

Bilan

— La méthode d'Euler construit la courbe de exp en suivant des petits morceaux de tangentes : à chaque pas h, on **multiplie par** $(1 + h)$.

— Les ordonnées obtenues forment une **suite géométrique** de raison $1 + h$: $y_n = (1 + h)^n$.

— Plus le pas est petit, plus la courbe obtenue est proche de la vraie courbe ; on trouve $\exp(1) = e \approx 2{,}718$.

— La construction laisse deviner les propriétés du cours : $\exp(x) > 0$, exp est croissante, et $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.