ACTIVITÉ – 1re SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

Résoudre une équation du second degré à la règle et au compas

Le cercle de Carlyle

Corrigé

Objectif. Trouver les solutions d'une équation du second degré *sans aucun calcul*, en traçant une seule figure ; puis comprendre, avec le produit scalaire, pourquoi la méthode fonctionne.

La méthode

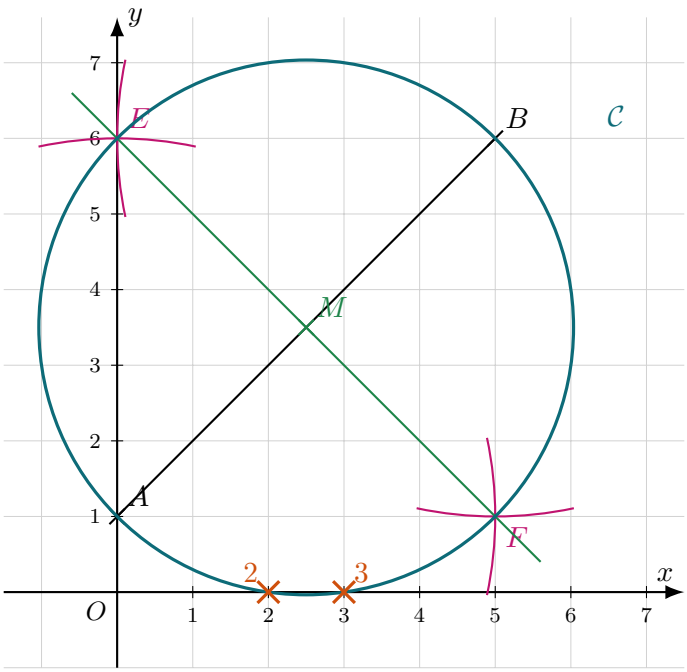
Toute équation $x^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire $x^2 - sx + p = 0$ avec $s = -b$ et $p = c$.

1. Dans un repère orthonormé, on place les points $A(0\,;1)$ et $B(s\,;p)$.
2. On trace le cercle de diamètre $[AB]$.
3. Les abscisses des points où ce cercle coupe l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation.

Cette méthode est attribuée à Thomas Carlyle (1795–1881), écrivain écossais qui fut d'abord professeur de mathématiques.

Partie A – Une première construction

On veut résoudre l'équation (E_1) : $x^2 - 5x + 6 = 0$. Les constructions se font dans le repère ci-dessous (unité : 1 cm).



1. Identifier s et p pour l'équation (E_1).

On compare $x^2 - 5x + 6$ avec $x^2 - sx + p$:
— $-s = -5$, donc $s = 5$;
— $p = 6$.

2. Dans le repère ci-dessus, le point $A(0\,;1)$ est placé. Placer le point $B(s\,;p)$.

$B(5\,;6)$.

3. Construire le milieu M de $[AB]$ à la règle et au compas.

a) Tracer le segment $[AB]$.
b) Écarter le compas de 5 cm. Tracer un arc de centre A qui passe de part et d'autre de $[AB]$, puis, *sans changer l'écartement*, un arc de centre B. Les deux arcs se coupent en deux points E et F.
c) Tracer la droite (EF) : c'est la médiatrice de $[AB]$. Elle coupe $[AB]$ en son milieu M.

d) Lire les coordonnées de E, F et M.

Avec un écartement de 5 cm, on lit $E(0\,;6)$ et $F(5\,;1)$. La médiatrice (EF) coupe $[AB]$ en $M(2{,}5\,;3{,}5)$.
Vérification par le calcul : $x_M = \dfrac{0+5}{2} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$ et $y_M = \dfrac{1+6}{2} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$.

4. Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre M passant par A. Expliquer pourquoi il passe aussi par B.

M est le milieu de $[AB]$, donc $MA = MB$. Le point B est à la même distance de M que A : il est sur $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

5. Le cercle $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points. Lire leurs abscisses x_1 et x_2.

On lit $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$.

6. Vérifier par le calcul que x_1 et x_2 sont solutions de (E_1).

Pour $x = 2$: $\quad 2^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$.
Pour $x = 3$: $\quad 3^2 - 5 \times 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$.
Donc 2 et 3 sont solutions de (E_1).

7. Calculer $x_1 + x_2$ et $x_1 \times x_2$. Que remarque-t-on ?

$x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5$ et $x_1 \times x_2 = 2 \times 3 = 6$.
On retrouve $x_1 + x_2 = s$ (la *somme*) et $x_1 \times x_2 = p$ (le *produit*).

Partie B – Avec l'application

Ouvrir l'activité interactive « Résoudre $x^2 - sx + p = 0$ à la règle et au compas » sur `https://www.webclasse.fr`.

1. Réaliser la construction de l'équation proposée en suivant les étapes, puis cliquer sur « Vérifier ma construction ».

2. Avec le bouton « Nouvelle figure », résoudre trois autres équations et compléter le tableau.

Équation	s	p	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \times x_2$
$x^2 - 4x + 3 = 0$	4	3	1	3	4	3
$x^2 - 6x + 8 = 0$	6	8	2	4	6	8
$x^2 - 4x + 4 = 0$	4	4	2	2	4	4

3. Quelle conjecture peut-on faire sur $x_1 + x_2$ et $x_1 \times x_2$?

(Exemples de réponses : les équations dépendent des figures obtenues.)
Conjecture : la somme des solutions est égale à s et leur produit est égal à p.

Partie C – Pourquoi ça marche ?

Rappel (produit scalaire). L'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.
Si $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ dans un repère orthonormé, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

On considère l'équation $x^2 - sx + p = 0$, les points $A(0\,;1)$, $B(s\,;p)$, et un point $X(x\,;0)$ de l'axe des abscisses.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{XA}$ et $\overrightarrow{XB}$.

$\overrightarrow{XA}\,(x_A - x_X\,;\, y_A - y_X) = (0 - x\,;\, 1 - 0)$, donc $\overrightarrow{XA}\,(-x\,;\, 1)$.
$\overrightarrow{XB}\,(x_B - x_X\,;\, y_B - y_X) = (s - x\,;\, p - 0)$, donc $\overrightarrow{XB}\,(s - x\,;\, p)$.

2. Montrer que $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = x^2 - sx + p$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} &= (-x) \times (s - x) + 1 \times p \\ &= -x \times s + (-x) \times (-x) + p \\ &= -sx + x^2 + p \\ &= x^2 - sx + p.\end{aligned}$$

3. En déduire que X est sur le cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si x est solution de l'équation $x^2 - sx + p = 0$.

D'après le rappel : X est sur le cercle de diamètre $[AB]$ $\iff$ $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = 0$ $\iff$ $x^2 - sx + p = 0$ (question 2).
Les points du cercle situés sur l'axe des abscisses ont donc pour abscisses les solutions de l'équation.

4. La conjecture de la partie B. On suppose que l'équation a deux solutions x_1 et x_2. On admet qu'alors $x^2 - sx + p = (x - x_1)(x - x_2)$ pour tout réel x. Développer $(x - x_1)(x - x_2)$ et démontrer la conjecture.

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2) &= x \times x + x \times (-x_2) + (-x_1) \times x + (-x_1) \times (-x_2) \\ &= x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2 \\ &= x^2 - (x_1 + x_2)\, x + x_1x_2.\end{aligned}$$

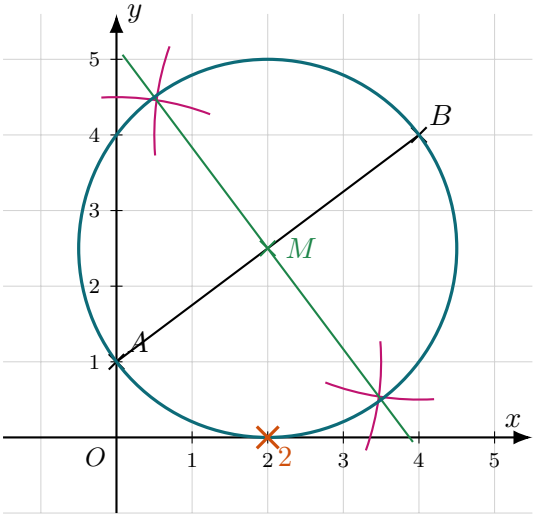
On compare avec $x^2 - sx + p$: les coefficients de x sont égaux, donc $x_1 + x_2 = s$; les termes constants sont égaux, donc $x_1x_2 = p$.

Partie D – Combien de solutions ?

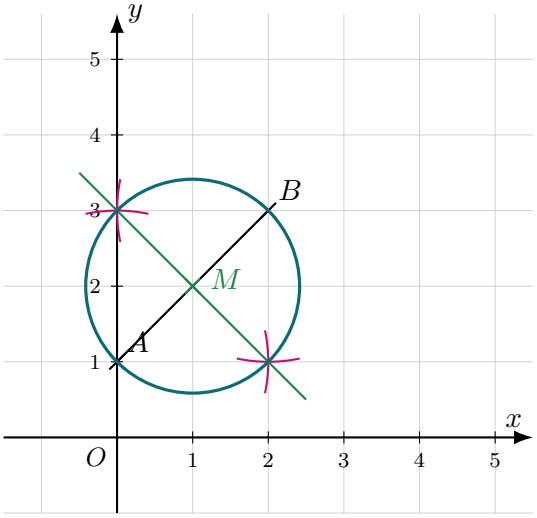
1. Faire la construction de Carlyle (repères ci-dessous, unité : 1 cm) pour chacune des deux équations : (E_2) : $x^2 - 4x + 4 = 0$ et (E_3) : $x^2 - 2x + 3 = 0$.

Combien de points communs le cercle et l'axe des abscisses ont-ils ? Combien de solutions l'équation a-t-elle ?

(E_2) : $x^2 - 4x + 4 = 0$



(E_3) : $x^2 - 2x + 3 = 0$



(E_2) : $s = 4$, $p = 4$, $B(4\,;4)$. Le cercle *touche* l'axe en un seul point, d'abscisse 2 : il est tangent à l'axe. L'équation a une seule solution, $x = 2$ (vérification : $2^2 - 4 \times 2 + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$).
(E_3) : $s = 2$, $p = 3$, $B(2\,;3)$. Le cercle ne coupe pas l'axe : l'équation n'a pas de solution réelle.

2. Calculer le discriminant Δ de (E_2), puis celui de (E_3). Ces résultats sont-ils cohérents avec la question 1 ?

(E_2) : $a = 1$, $b = -4$, $c = 4$. $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 16 - 16 = 0$: une seule solution.
(E_3) : $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8 < 0$: aucune solution.
C'est cohérent avec les constructions.

3. Cas général. On revient à $x^2 - sx + p = 0$ avec $A(0\,;1)$ et $B(s\,;p)$.

a) Donner les coordonnées du centre M du cercle, puis la distance d de M à l'axe des abscisses.

b) Montrer que $AB^2 = s^2 + (p-1)^2$. En déduire le carré du rayon : $R^2 = \dfrac{s^2 + (p-1)^2}{4}$.

c) Le cercle coupe (ou touche) l'axe des abscisses si et seulement si $d \leqslant R$, c'est-à-dire $d^2 \leqslant R^2$. Montrer que cela équivaut à $s^2 - 4p \geqslant 0$.

d) Calculer le discriminant de $x^2 - sx + p = 0$ et conclure.

a) M est le milieu de $[AB]$: $M\left(\dfrac{0+s}{2}\,;\,\dfrac{1+p}{2}\right)$, soit $M\left(\dfrac{s}{2}\,;\,\dfrac{p+1}{2}\right)$. La distance de M à l'axe des abscisses est $|y_M|$, donc $d = \dfrac{|p+1|}{2}$ et $d^2 = \dfrac{(p+1)^2}{4}$.

b) $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (s-0)^2 + (p-1)^2 = s^2 + (p-1)^2$.
$R = \dfrac{AB}{2}$, donc $R^2 = \dfrac{AB^2}{4} = \dfrac{s^2 + (p-1)^2}{4}$.

c) $d^2 \leqslant R^2 \iff \dfrac{(p+1)^2}{4} \leqslant \dfrac{s^2 + (p-1)^2}{4}$

$\iff (p+1)^2 \leqslant s^2 + (p-1)^2$ (on multiplie par 4)

$\iff p^2 + 2p + 1 \leqslant s^2 + p^2 - 2p + 1$ (identités remarquables)

$\iff 2p \leqslant s^2 - 2p$ (on retire $p^2 + 1$)

$\iff 4p \leqslant s^2$ (on ajoute $2p$)

$\iff s^2 - 4p \geqslant 0$.

d) Pour $x^2 - sx + p = 0$: $a = 1$, $b = -s$, $c = p$, donc $\Delta = (-s)^2 - 4 \times 1 \times p = s^2 - 4p$.
Le cercle rencontre l'axe des abscisses si et seulement si $\Delta \geqslant 0$: on retrouve la condition d'existence des solutions. Si $\Delta = 0$, le cercle est tangent à l'axe (une seule solution).

Partie E – Pour aller plus loin

Résoudre l'équation $x^2 + x - 6 = 0$ par la méthode de Carlyle, sur une feuille à petits carreaux (attention : s et p peuvent être négatifs). Vérifier ensuite les solutions par le calcul.

$x^2 + x - 6 = x^2 - (-1)x + (-6)$, donc $s = -1$ et $p = -6$: $A(0\,;1)$ et $B(-1\,;-6)$.
Le centre est $M\left(\dfrac{0+(-1)}{2}\,;\,\dfrac{1+(-6)}{2}\right) = (-0{,}5\,;\,-2{,}5)$. Le cercle coupe l'axe des abscisses en $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$.
Vérification : $(-3)^2 + (-3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$ et $2^2 + 2 - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$.
Et on a bien $x_1 + x_2 = -3 + 2 = -1 = s$ et $x_1 \times x_2 = (-3) \times 2 = -6 = p$.