ACTIVITÉ – 1re SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

Résoudre une équation du second degré à la règle et au compas

Le cercle de Carlyle

Nom : ..... Classe : .....

Objectif. Trouver les solutions d'une équation du second degré *sans aucun calcul*, en traçant une seule figure ; puis comprendre, avec le produit scalaire, pourquoi la méthode fonctionne.

La méthode

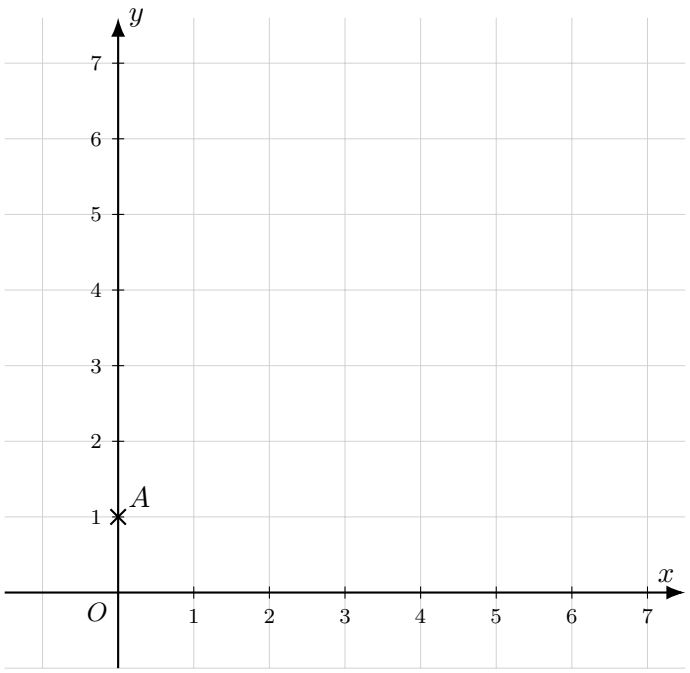
Toute équation $x^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire $x^2 - sx + p = 0$ avec $s = -b$ et $p = c$.

1. Dans un repère orthonormé, on place les points $A(0\,;1)$ et $B(s\,;p)$.
2. On trace le cercle de diamètre $[AB]$.
3. Les abscisses des points où ce cercle coupe l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation.

Cette méthode est attribuée à Thomas Carlyle (1795–1881), écrivain écossais qui fut d'abord professeur de mathématiques.

Partie A – Une première construction

On veut résoudre l'équation (E_1) : $x^2 - 5x + 6 = 0$. Les constructions se font dans le repère ci-dessous (unité : 1 cm).



1. Identifier s et p pour l'équation (E_1).

.....

2. Dans le repère ci-dessus, le point $A(0\,;1)$ est placé. Placer le point $B(s\,;p)$.

3. **Construire le milieu M de $[AB]$** à la règle et au compas.

a) Tracer le segment $[AB]$.

b) Écarter le compas de 5 cm (ou d'une longueur supérieur à la moitié de la longueur AB). Tracer un arc de centre A qui passe de part et d'autre de $[AB]$, puis, *sans changer l'écartement*, un arc de centre B. Les deux arcs se coupent en deux points E et F.

c) Tracer la droite (EF) : c'est la médiatrice de $[AB]$. Elle coupe $[AB]$ en son milieu M.

d) Lire les coordonnées de E, F et M.

.....

4. Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre M passant par A. Expliquer pourquoi il passe aussi par B.

5. Le cercle $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points. Lire leurs abscisses x_1 et x_2.

6. Vérifier par le calcul que x_1 et x_2 sont solutions de (E_1).

7. Calculer $x_1 + x_2$ et $x_1 \times x_2$. Que remarque-t-on ?

Partie B – Avec l'application

Ouvrir l'activité interactive « Résoudre $x^2 - sx + p = 0$ à la règle et au compas » sur `https://www.webclasse.fr`.

1. Réaliser la construction de l'équation proposée en suivant les étapes, puis cliquer sur « Vérifier ma construction ».

2. Avec le bouton « Nouvelle figure », résoudre trois autres équations et compléter le tableau.

Équation	s	p	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \times x_2$

3. Quelle conjecture peut-on faire sur $x_1 + x_2$ et $x_1 \times x_2$?

Partie C – Pourquoi ça marche ?

Rappel (produit scalaire). L'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.
Si $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ dans un repère orthonormé, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

On considère l'équation $x^2 - sx + p = 0$, les points $A(0\,;1)$, $B(s\,;p)$, et un point $X(x\,;0)$ de l'axe des abscisses.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{XA}$ et $\overrightarrow{XB}$.

2. Montrer que $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = x^2 - sx + p$.

3. En déduire que X est sur le cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si x est solution de l'équation $x^2 - sx + p = 0$.

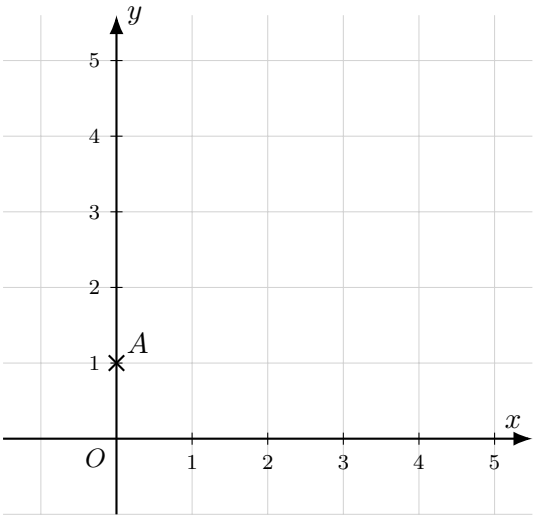
4. La conjecture de la partie B. On suppose que l'équation a deux solutions x_1 et x_2. On admet qu'alors $x^2 - sx + p = (x - x_1)(x - x_2)$ pour tout réel x. Développer $(x - x_1)(x - x_2)$ et démontrer la conjecture.

Partie D – Combien de solutions ?

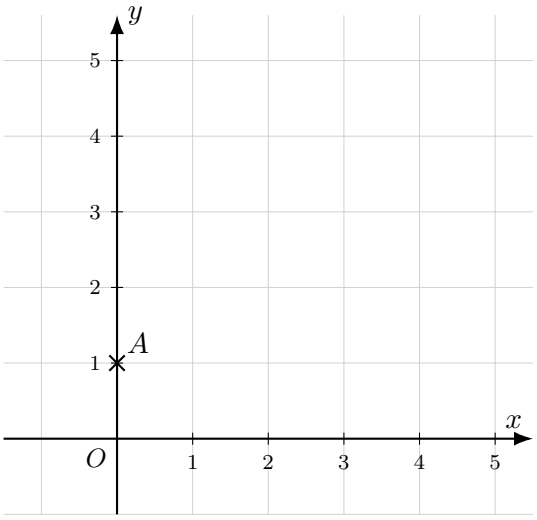
1. Faire la construction de Carlyle (repères ci-dessous, unité : 1 cm) pour chacune des deux équations : (E_2) : $x^2 - 4x + 4 = 0$ et (E_3) : $x^2 - 2x + 3 = 0$.

Combien de points communs le cercle et l'axe des abscisses ont-ils ? Combien de solutions l'équation a-t-elle ?

(E_2) : $x^2 - 4x + 4 = 0$



(E_3) : $x^2 - 2x + 3 = 0$



2. Calculer le discriminant Δ de (E_2), puis celui de (E_3). Ces résultats sont-ils cohérents avec la question 1 ?

3. Cas général. On revient à $x^2 - sx + p = 0$ avec $A(0\,;1)$ et $B(s\,;p)$.

a) Donner les coordonnées du centre M du cercle, puis la distance d de M à l'axe des abscisses.

b) Montrer que $AB^2 = s^2 + (p-1)^2$. En déduire le carré du rayon : $R^2 = \dfrac{s^2 + (p-1)^2}{4}$.

c) Le cercle coupe (ou touche) l'axe des abscisses si et seulement si $d \leqslant R$, c'est-à-dire $d^2 \leqslant R^2$. Montrer que cela équivaut à $s^2 - 4p \geqslant 0$.

d) Calculer le discriminant de $x^2 - sx + p = 0$ et conclure.

Partie E – Pour aller plus loin

Résoudre l'équation $x^2 + x - 6 = 0$ par la méthode de Carlyle, sur une feuille à petits carreaux (attention : s et p peuvent être négatifs). Vérifier ensuite les solutions par le calcul.