Fiche de synthèse sur les suites

Niveau première • Chapitre « Suites »

u_0 u_1 u_2 u_3 $\cdots$ u_n u_{n+1}

Sauf indication contraire, les suites sont définies pour tout entier naturel n.

Version animée en ligne

Sommaire. **A.** Généralités (définir une suite, comportement, Python) **B.** Sens de variation **C.** Suites arithmétiques et géométriques **D.** Sommes **E.** Erreurs fréquentes **F.** Solutions des « À toi ».

Partie A | Généralités

1 Quelles sont les deux façons de définir une suite ?

Formule explicite : $u_n = f(n)$ On calcule **directement** n'importe quel terme à partir de son rang n.

Récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ et u_0 On calcule chaque terme **à partir du précédent**, de proche en proche.

EXEMPLE $u_n = 3n - 1$. Calculons u_5.

$$u_5 = 3 \times 5 - 1$$
$$u_5 = 15 - 1$$
$$u_5 = 14$$

Pas besoin de connaître u_4 : on remplace n par 5.

EXEMPLE $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

$$v_1 = 2 \times v_0 - 1 = 2 \times 2 - 1 = 3$$
$$v_2 = 2 \times v_1 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$$
$$v_3 = 2 \times v_2 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$$

Pour obtenir v_3, il faut d'abord v_1 et v_2.

Lien avec le tableur Une formule tirée vers le bas comme `=B2*2-1` est une formule de récurrence ; une formule qui utilise le rang, comme `=3*A2-1`, est une formule explicite.

▶ À toi 1

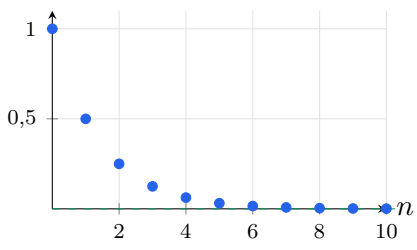
a) On donne $w_n = n^2 - n$. Calculer w_0 et w_3.

b) On donne $t_0 = 1$ et $t_{n+1} = 3t_n + 2$. Calculer t_1 et t_2.

2 Comment se comporte une suite quand n devient grand ? (approche intuitive)

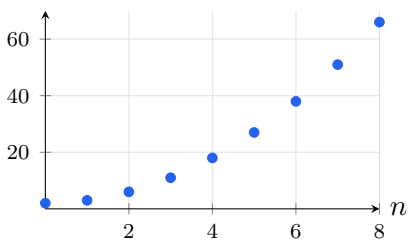
On représente une suite par les points de coordonnées $(n\,;u_n)$ et on observe ce qui se passe quand n augmente.

$u_n = 0{,}5^n$



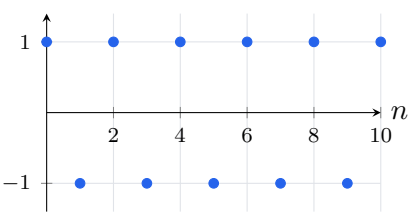
Les termes se rapprochent autant qu'on veut de 0 : la suite **tend vers** 0 (on dit qu'elle converge vers 0).

$u_n = n^2 + 2$



Les termes deviennent aussi grands qu'on veut : la suite **tend vers** $+\infty$.

$u_n = (-1)^n$



Les termes valent alternativement 1 et -1 : la suite **n'a pas de limite**.

3 Comment calculer des termes avec Python ?

Calculer le terme de rang n de la suite $v_0 = 2$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$: on répète n fois le calcul.

```
def terme(n):
    v = 2                   # v0
    for i in range(n):      # n fois
        v = 2*v - 1         # terme suivant
    return v

print(terme(3))             # affiche 9
```

Chercher un seuil : le premier rang n tel que $v_n > 1\,000$. On ne sait pas combien de fois répéter : on utilise `while`.

```
v = 2
n = 0
while v <= 1000:        # tant que le seuil
    v = 2*v - 1         # n'est pas dépassé
    n = n + 1
print(n)                # affiche 10
```

En effet $v_9 = 513$ et $v_{10} = 1\,025$.

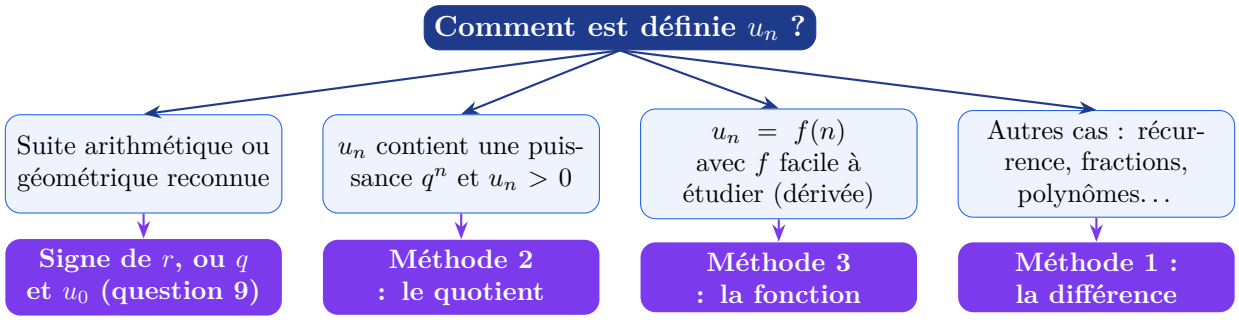
Partie B | Sens de variation

4 Comment montrer qu'une suite (u_n) est croissante ou décroissante ?

Attention : on ne peut pas se contenter de calculer quelques termes ! Ils donnent une idée, mais ne prouvent rien pour *tous* les entiers n.

Rappel : définitions Dire que (u_n) est **croissante** signifie que pour tout entier n : $u_{n+1} \geqslant u_n$.
Dire que (u_n) est **décroissante** signifie que pour tout entier n : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
Avec des inégalités strictes, on dit « strictement croissante » ou « strictement décroissante ».

Quelle méthode choisir ?



Méthode 1 : la différence On calcule $u_{n+1} - u_n$ et on étudie son signe :
- si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite (u_n) est croissante ;
- si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.

EXEMPLE Étudions le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 + 2$.

$u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2 + 2] - [n^2 + 2]$	*On remplace n par $n+1$ pour obtenir u_{n+1}.*
$u_{n+1} - u_n = [n^2 + 2n + 1 + 2] - [n^2 + 2]$	*On développe : $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.*
$u_{n+1} - u_n = [n^2 + 2n + 3] - [n^2 + 2]$	*On réduit : $1 + 2 = 3$.*
$u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 3 - n^2 - 2$	*Le signe $-$ devant le crochet change tous ses signes.*
$u_{n+1} - u_n = 2n + 1$	*$n^2 - n^2 = 0$ et $3 - 2 = 1$.*

$n \geqslant 0$ donc $2n + 1 \geqslant 1 > 0$: ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout n et **la suite (u_n) est strictement croissante.**

Méthode 2 : le quotient (suite à termes strictement positifs) On calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et on le compare à 1 :

- si pour tout n, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la suite (u_n) est croissante ;
- si pour tout n, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Pourquoi $u_n > 0$? En multipliant $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ par $u_n > 0$, le sens de l'inégalité ne change pas : on obtient $u_{n+1} \geqslant u_n$.

EXEMPLE Étudions le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = 0{,}5^n$.
$0{,}5 > 0$ donc $0{,}5^n = 0{,}5 \times 0{,}5 \times \cdots \times 0{,}5 > 0$: la suite est à termes strictement positifs.

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{0{,}5^{n+1}}{0{,}5^n}$	*On remplace n par $n+1$ au numérateur.*
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0{,}5^{n+1-n}$	*Règle : $\dfrac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$.*
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0{,}5^1$	*$n + 1 - n = 1$.*
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0{,}5$	*$a^1 = a$.*

Pour tout n, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0{,}5 < 1$: **la suite (u_n) est strictement décroissante.**

Méthode 3 : la fonction associée (suite définie par $u_n = f(n)$) Si $u_n = f(n)$ et si f est croissante (respectivement décroissante) sur $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante (respectivement décroissante).
Cette méthode ne s'applique **pas** aux suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ (voir la partie E).

EXEMPLE Étudions le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = n^3 + 2n$.
On a $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^3 + 2x$, définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

$f(x) = x^3 + 2x$	*La fonction associée.*
$f'(x) = 3x^2 + 2$	*$(x^3)' = 3x^2$ et $(2x)' = 2$.*
$3x^2 \geqslant 0$	*Un carré est positif.*
$3x^2 + 2 \geqslant 2 > 0$	*On ajoute 2 aux deux membres.*

$f'(x) > 0$ sur $[0\,;+\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$: **la suite (u_n) est strictement croissante.**

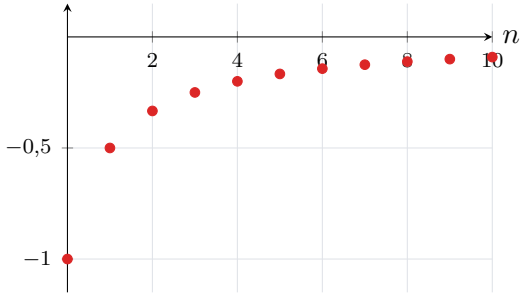
▶ À toi 2

Étudier le sens de variation de chaque suite en choisissant la méthode adaptée.
a) $u_n = 3 - 2n$ **b)** $v_n = 5 \times 1{,}2^n$ **c)** $w_n = n^2 + 6n + 1$

5 Une suite croissante est-elle forcément positive ?

Non ! La suite définie par $u_n = -\dfrac{1}{n+1}$ est à termes négatifs, et pourtant elle est croissante :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+2} - \left(-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1}$$
$$u_{n+1} - u_n = \frac{-(n+1)+(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$
$$u_{n+1} - u_n = \frac{-n-1+n+2}{(n+1)(n+2)}$$
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$



Les points montent, mais restent sous l'axe.

Partie C | Suites arithmétiques et géométriques

6 Comment reconnaître et montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique ?

Suite arithmétique de raison r On ajoute toujours le même nombre r : $u_{n+1} = u_n + r$.
Pour le montrer : on calcule $u_{n+1} - u_n$; si le résultat est une constante r (il ne dépend pas de n), la suite est arithmétique de raison r.
Reconnaître : $u_n = an + b$ est arithmétique de raison a, avec $u_0 = b$.

Suite géométrique de raison q On multiplie toujours par le même nombre q : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Pour le montrer : si $u_n \neq 0$, on calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$; si le résultat est une constante q, la suite est géométrique de raison q.
Reconnaître : $u_n = a \times q^n$ est géométrique de raison q, avec $u_0 = a$.

! **Attention :** on ne peut pas se contenter de calculer quelques termes ! Si certains termes peuvent être nuls, on ne divise pas : on montre directement que $u_{n+1} = q \times u_n$.

EXEMPLE Montrons que $u_n = 5n+3$ définit une suite arithmétique.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= [5(n+1)+3] - [5n+3] \\ u_{n+1} - u_n &= [5n+5+3] - [5n+3] \\ u_{n+1} - u_n &= [5n+8] - [5n+3] \\ u_{n+1} - u_n &= 5n+8-5n-3 \\ u_{n+1} - u_n &= 5 \end{aligned}$$

Constante : **arithmétique de raison** $r = 5$, de premier terme $u_0 = 3$.

EXEMPLE Montrons que $u_n = 3^{2n}$ définit une suite géométrique ($u_n \neq 0$).

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{3^{2(n+1)}}{3^{2n}} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{3^{2n+2}}{3^{2n}} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &= 3^{2n+2-2n} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &= 3^2 \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &= 9 \end{aligned}$$

Constante : **géométrique de raison** $q = 9$, de premier terme $u_0 = 3^0 = 1$.

▶ À toi 3

La suite définie par $w_n = 4 \times 3^{n+1}$ est-elle géométrique ? Si oui, donner sa raison et son premier terme.

7 Existe-t-il des suites qui ne sont ni arithmétiques ni géométriques ?

Bien sûr ! Prenons $u_n = n^2 + 1$: $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 5$.

- $u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$ et $u_2 - u_1 = 5 - 2 = 3$: comme $1 \neq 3$, la suite **n'est pas arithmétique**.
- $\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{1} = 2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{2} = 2{,}5$: comme $2 \neq 2{,}5$, la suite **n'est pas géométrique**.

Important Pour prouver qu'une suite **n'est pas** arithmétique (ou géométrique), un seul contre-exemple suffit : ici, trois termes constituent une vraie preuve. Pour prouver qu'une suite **est** arithmétique, il faut un calcul valable pour tout n.

8 Comment obtenir un terme quelconque d'une suite arithmétique ou géométrique ?

Suite arithmétique de raison r

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p) \times r}$$

En particulier : $u_n = u_0 + n \times r$.
Terme cherché = terme donné + (différence des rangs) × raison

Suite géométrique de raison q

$$\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$$

En particulier : $u_n = u_0 \times q^n$.
Terme cherché = terme donné × raison$^{\text{(différence des rangs)}}$

EXEMPLE $r = 8$ et $u_{31} = 4$. Calculer u_{133}.

$$\begin{aligned} u_{133} &= u_{31} + (133-31) \times 8 \\ u_{133} &= 4 + 102 \times 8 \\ u_{133} &= 4 + 816 \\ u_{133} &= 820 \end{aligned}$$

EXEMPLE $q = 2$ et $u_7 = 5$. Calculer u_{19}.

$$\begin{aligned} u_{19} &= u_7 \times 2^{19-7} \\ u_{19} &= 5 \times 2^{12} \\ u_{19} &= 5 \times 4\,096 \\ u_{19} &= 20\,480 \end{aligned}$$

▶ **À toi 4**

a) (u_n) est arithmétique, $u_0 = 7$ et $r = -3$. Calculer u_{20}. **b)** (v_n) est géométrique, $v_2 = 3$ et $q = 2$. Calculer v_6.

9 Peut-on étudier rapidement le sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique ?

Suite géométrique de raison q et de premier terme u_0

Raison	$u_0 > 0$	$u_0 < 0$
$q > 1$	croissante ↗	décroissante ↘
$q = 1$	constante →	constante →
$0 < q < 1$	décroissante ↘	croissante ↗
$q < 0$	alternée	alternée

« Alternée » : les termes changent de signe à chaque rang.

Suite arithmétique de raison r

Raison	Sens de variation
$r > 0$	croissante ↗
$r = 0$	constante →
$r < 0$	décroissante ↘

Partie D | Sommes

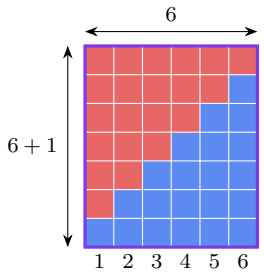
10 Quelles sont les deux sommes de référence ?

À connaître par cœur

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\boxed{1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}} \quad (q \neq 1)$$

Attention : la seconde somme contient $n+1$ termes (de $q^0 = 1$ à q^n).



Astuce de Gauss : deux fois la somme $1 + \cdots + 6$ forment un rectangle 6×7.

11 Comment calculer la somme des termes d'une suite arithmétique ?

Formule Si $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ est la somme de $\boldsymbol{(n - p + 1)}$ termes d'une suite arithmétique, alors

$$\boxed{S = \frac{(n - p + 1)(u_p + u_n)}{2}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad S = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier} + \text{dernier})}{2}.$$

EXEMPLE $u_n = 5n + 3$. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.
Nombre de termes : $10 - 0 + 1 = 11$; $u_0 = 5 \times 0 + 3 = 3$; $u_{10} = 5 \times 10 + 3 = 53$.

$$S = \frac{11 \times (3 + 53)}{2} = \frac{11 \times 56}{2} = \frac{616}{2} = 308$$

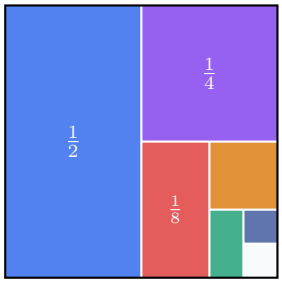
12 Comment calculer la somme des termes d'une suite géométrique ?

Formule Si $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ est la somme de $\boldsymbol{(n-p+1)}$ termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors

$$\boxed{S = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad S = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}.$$

EXEMPLE Calculer $S = 1+2+4+8+\cdots+512$.
Suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2 ; $512 = 2^9$, donc il y a $9-0+1 = 10$ termes.

$$S = 1 \times \frac{1-2^{10}}{1-2}$$
$$S = \frac{1-1\,024}{-1}$$
$$S = \frac{-1\,023}{-1}$$
$$S = 1\,023$$



$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{64} = 1-\frac{1}{64}$: le carré d'aire 1 se remplit sans déborder.

▶ À toi 5

a) Calculer $S = 1+2+3+\cdots+50$. **b)** Calculer $T = 3+6+12+24+\cdots+384$.

Partie E | Erreurs fréquentes

× À ne pas écrire	✓ Ce qu'il faut écrire
$(n+1)^2 = n^2+1$	$(n+1)^2 = n^2+2n+1$
$u_n = n^2+2$ donc $u_{n+1} = n^2+2+1$	On remplace n par $n+1$: $u_{n+1} = (n+1)^2+2$
$2^{n+1} = 2^n+1$	$2^{n+1} = 2^n \times 2$
$[n^2+3]-[n^2+2] = n^2+3-n^2+2$	Le $-$ change tous les signes : n^2+3-n^2-2
De u_3 à u_{12}, il y a $12-3 = 9$ termes	Il y a $12-3+1 = 10$ termes
$u_0 < u_1 < u_2$ donc la suite est croissante	Quelques termes ne prouvent rien : il faut un calcul pour tout n
On compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 alors que $u_n < 0$	La méthode du quotient exige $u_n > 0$; sinon, utiliser la différence
$u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ et $x \mapsto \frac{x}{2}$ croissante, donc (u_n) croissante	Faux pour une récurrence ! Avec $u_0 = 1$: 1 ; 0,5 ; 0,25… la suite décroît
Une suite croissante est positive	Contre-exemple : $u_n = -\frac{1}{n+1}$ (question 5)

Partie F | Solutions des exercices « À toi »

À toi 1 (question 1). **a)** $w_0 = 0^2-0 = 0$; $w_3 = 3^2-3 = 9-3 = 6$. **b)** $t_1 = 3\times t_0+2 = 3\times 1+2 = 5$; $t_2 = 3 \times t_1 + 2 = 3 \times 5 + 2 = 17$.

À toi 2 (question 4).

a) Méthode de la différence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= [3 - 2(n+1)] - [3 - 2n] \\ u_{n+1} - u_n &= [3 - 2n - 2] - [3 - 2n] \\ u_{n+1} - u_n &= [1 - 2n] - [3 - 2n] \\ u_{n+1} - u_n &= 1 - 2n - 3 + 2n \\ u_{n+1} - u_n &= -2 \end{aligned}$$

$-2 < 0$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante. (On reconnaît aussi une suite arithmétique de raison -2.)

b) Méthode du quotient : $5 > 0$ et $1{,}2^n > 0$, donc $v_n > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{5 \times 1{,}2^{n+1}}{5 \times 1{,}2^n} \\ \frac{v_{n+1}}{v_n} &= 1{,}2^{n+1-n} \\ \frac{v_{n+1}}{v_n} &= 1{,}2 \end{aligned}$$

$1{,}2 > 1$ et $v_n > 0$ donc la suite (v_n) est strictement croissante.

c) Méthode de la fonction : $w_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 + 6x + 1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 6 \\ x \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad 2x &\geqslant 0 \\ \text{donc} \quad 2x + 6 &\geqslant 6 > 0 \end{aligned}$$

f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc la suite (w_n) est strictement croissante.

À toi 3 (question 6). $4 > 0$ et $3^{n+1} > 0$ donc $w_n \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{4 \times 3^{n+2}}{4 \times 3^{n+1}} \\ \frac{w_{n+1}}{w_n} &= 3^{n+2-(n+1)} \\ \frac{w_{n+1}}{w_n} &= 3^{n+2-n-1} \\ \frac{w_{n+1}}{w_n} &= 3^1 = 3 \end{aligned}$$

La suite est géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $w_0 = 4 \times 3^{0+1} = 4 \times 3 = 12$.

À toi 4 (question 8).

a) $u_{20} = u_0 + 20 \times r = 7 + 20 \times (-3) = 7 - 60 = -53$.

b) $v_6 = v_2 \times 2^{6-2} = 3 \times 2^4 = 3 \times 16 = 48$.

À toi 5 (question 12).

a) $S = \dfrac{50 \times 51}{2} = \dfrac{2\,550}{2} = 1\,275$.

b) Chaque terme est le double du précédent : suite géométrique de premier terme 3 et de raison 2.

$384 = 3 \times 128 = 3 \times 2^7$: les termes vont de 3×2^0 à 3×2^7, soit $7 - 0 + 1 = 8$ termes.

$$
\begin{aligned}
T &= 3 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2} \\
T &= 3 \times \frac{1 - 256}{-1} \\
T &= 3 \times \frac{-255}{-1} \\
T &= 3 \times 255 \\
T &= 765
\end{aligned}
$$