Suites et tableur – Activité 2

Reconnaître, appliquer, prolonger

Nom : ..... Classe : .....

Prérequis (activité 1) : une suite est **arithmétique** de raison r si $u_{n+1} = u_n + r$, et alors $u_n = u_0 + n \times r$; elle est **géométrique** de raison q si $u_{n+1} = q \times u_n$, et alors $u_n = u_0 \times q^n$.

Même organisation que dans l'activité 1 : la colonne **A** contient le rang n, le terme de rang 0 est en ligne 2.

Exercice 1 – Reconnaître le type d'une suite

	A	B	C	D	E
1	n	a_n	b_n	c_n	d_n
2	0	5	200	1	40
3	1	7,5	100	4	33
4	2	10	50	9	26
5	3	12,5	25	16	19
6	4	15	12,5	25	12
7	5	17,5	6,25	36	5
8	6	20	3,125	49	−2

Quatre suites ont été construites dans ce tableur, mais on a effacé les formules.

Méthode : pour chaque colonne, calculer deux différences consécutives ($u_1 - u_0$ et $u_2 - u_1$) et deux quotients consécutifs ($\frac{u_1}{u_0}$ et $\frac{u_2}{u_1}$).

- Différences égales → peut-être arithmétique.
- Quotients égaux → peut-être géométrique.
- Ni l'un ni l'autre → ni arithmétique, ni géométrique.

Quelques termes ne prouvent pas qu'une suite est arithmétique ; ici, on sait que les colonnes ont été construites par une formule tirée vers le bas.

1. Compléter le tableau.

Suite	Type	Raison	Formule en ligne 3	Formule explicite
(a_n)	.....	.....	.....	$a_n =$ .....
(b_n)	.....	.....	.....	$b_n =$ .....
(c_n)	.....	—	—	—
(d_n)	.....	.....	.....	$d_n =$ .....

2. Justifier que (c_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

.....

.....

Reconnaître pourtant les nombres de la colonne : ce sont des ....., et $c_n =$ .....

3. Donner le sens de variation de chaque suite (croissante ou décroissante).

(a_n) : ..... (b_n) : ..... (c_n) : ..... (d_n) : .....

Exercice 2 – Un placement à 3 % par an

Le 1er janvier 2027, Léa place 1 000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an : chaque année, le capital augmente de 3 %. On note C_n le capital (en euros) au bout de n années, donc $C_0 = 1\,000$.

	A	B	C
1	n	C_n	D_n
2	0	1000	1000
3	1	1030	1040
4	2	1060,90	1080
5	3	1092,73	1120
6	4	1125,51	1160
7	5	1159,27	1200
8	⋮	⋮	⋮

1. Compléter pour justifier qu'augmenter de 3 % revient à multiplier par 1,03 :

$$C_{n+1} = C_n + 3\,\% \text{ de } C_n$$
$$C_{n+1} = C_n + \ldots\ldots \times C_n$$
$$C_{n+1} = (1 + \ldots\ldots) \times C_n$$
$$C_{n+1} = \ldots\ldots \times C_n$$

2. Quelle formule a-t-on écrite en **B3** ? ……

3. La suite (C_n) est …… de raison ……, donc $C_n =$ ……

4. Calculer le capital au bout de 10 ans (arrondi au centime) : $C_{10} =$ ……

5. Seuil. Léa veut savoir au bout de combien d'années son capital dépassera 1 500 €.

Compléter le programme Python :

```
C = 1000
n = 0
while C ........ :
    C = ............
    n = n + 1
print(n)
```

En prolongeant le tableur (ou avec le programme), donner la réponse :

au bout de ……. ans.

Vérification : $C_{13} \approx$ …… et $C_{14} \approx$ ……

6. Une autre offre. Une banque propose à Léa un autre placement : 40 € ajoutés chaque année. On note D_n ce capital (colonne **C**), avec $D_0 = 1\,000$.

La suite (D_n) est …… de raison ……, et $D_n =$ ……

Quelle formule taper en **C3** ? …… Calculer $D_{10} =$ ……

7. Quelle offre est la meilleure au bout de 10 ans ? ……

Sur l'ordinateur Prolonger les deux colonnes. À partir de combien d'années le premier placement devient-il plus intéressant que le second ?
Au bout de ……. ans. ($C_{19} \approx$ …… $<$ $D_{19} =$ …… ; $C_{20} \approx$ …… $>$ $D_{20} =$ ……)

Une suite géométrique de raison $q > 1$ finit toujours par dépasser une suite arithmétique, même si elle part plus lentement.

Exercice 3 – Cumuler pour découvrir des sommes

Partie A. Dans la colonne **B**, on a la suite $u_n = n$. Dans la colonne **C**, on veut la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

	A	B	C	D
1	n	u_n	S_n	
2	0	0	=B2	
3	1	1	=C2+B3	
4	2	2	3	
5	3	3	6	
6	4	4	10	
7	5	5	15	
8	6	6	21	
9	7	7	28	
10	8	8	36	

1. Expliquer pourquoi la formule `=C2+B3`, tirée vers le bas, calcule bien les sommes.

   .....

   .....

2. Vérifier à la main : $S_4 = 0+1+2+3+4 =$ .....

3. On admet la formule $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
   Quelle formule taper en **D2** pour la tester ? .....

4. Les colonnes **C** et **D** sont-elles identiques ? ☐ oui ☐ non. En déduire $1+2+\cdots+100 =$ .....

Partie B. On remplace la colonne **B** par la suite des nombres impairs : $v_n = 2n+1$ (1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ...), et la colonne **C** calcule $T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

5. Compléter : $T_0 = 1$; $T_1 = 1+3 =$ ..... ; $T_2 = 1+3+5 =$ ..... ; $T_3 =$ ..... ; $T_4 =$ .....

6. Quelle conjecture peut-on faire ? $T_n =$ .....

7. **Preuve.** La suite (v_n) est arithmétique (raison 2). Avec la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique :

$$T_n = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

$$T_n = \frac{(n+1)\times(v_0+v_n)}{2}$$
$$T_n = \frac{(n+1)\times(1+\ldots\ldots)}{2}$$
$$T_n = \frac{(n+1)\times(\ldots\ldots)}{2}$$
$$T_n = \frac{(n+1)\times 2\times(\ldots\ldots)}{2}$$
$$T_n = \ldots\ldots$$

Exercice 4 – Défi : ni l'une ni l'autre ?

	A	B	C
1	n	u_n	u_n+1
2	0	0	1
3	1	1	2
4	2	3	4
5	3	7	8
6	4	15	16
7	5	31	32
8	6	63	64

On a obtenu la colonne **B** avec la formule `=2*B2+1` écrite en **B3**.

1. Traduire cette formule : $u_{n+1} =$ .....

2. La suite est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.

   .....

   .....

3. La colonne **C** contient u_n+1. Quelle formule a-t-on tapée en **C2** ? .....

4. Dans la colonne **C**, on reconnaît les puissances de ..... : $u_n+1 =$ ....., donc $u_n =$ .....

5. En déduire u_{10} : $u_{10} =$ .....